

8. Intégration sur un intervalle quelconque

Intégration sur un segment

1 ♥ ★☆☆ Calculer les intégrales suivantes.

- | | |
|--|---|
| 1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx.$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^2 x dx.$
3. $\int_0^1 \frac{3x+7}{x^2+5x+6} dx.$
4. $\int_0^1 \frac{2x+2}{x^2+4x+4} dx.$ | 5. $\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2+x+1} dx.$
6. $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx.$
7. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$
8. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{e^x+1}} dx.$ |
|--|---|

2 ★☆☆ Montrer que

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}.$$

3 ♥ ★☆☆ Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+3k}.$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}.$
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2}.$

4 ♥ ★☆☆ *Intégrales de Wallis.*

On considère la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt.$$

1. Calculer I_0 , I_1 et I_2 .
2. a. Étudier la monotonie puis la convergence de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+1}).$$

c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Intégrales généralisées

5 ♥ ★☆☆ Étudier la convergence des intégrales suivantes en fonction des éventuels paramètres (réels) :

- | | |
|--|---|
| 1. $\int_0^1 \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{t}} dt$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$
4. $\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{e^t} dt$ | 5. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} t}{t \operatorname{ch} t} dt$
6. $\int_0^1 \frac{dt}{\arcsin t}$
7. $\int_0^1 \frac{(1+t)^\alpha}{t^\beta(1-t)^\gamma} dt$
8. $\int_0^{+\infty} (\sqrt{t^2+1} - t)^\alpha dt$ |
|--|---|

6 ★★☆☆ Montrer que les intégrales suivantes convergent et déterminer leur valeur.

- | | |
|---|---|
| 1. ★☆☆ $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du.$
2. ★☆☆ $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t-e^t} dt.$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t+1}}.$ | 4. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2\sqrt{1+t^2}}.$
5. $\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx.$ |
|---|---|

7 ♥ ★★☆☆ En fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, étudier la convergence des intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 \frac{\ln t}{(1-t)^\alpha} dt$
2. $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^\alpha} dt$

8 ★★☆☆ Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Pour quels complexes z la fonction $f_n : t \mapsto t^n e^{zt}$ est-elle intégrable sur $[0, +\infty[$?
2. Pour ces valeurs de z et pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{zt} dt.$$

9 ★★☆☆

1. Après avoir montré sa convergence, calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt.$$

2. Montrer que pour tout $a > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2} dt = \frac{\pi}{2} \frac{\ln a}{a}.$$

10 ♥ ★☆☆ *Primitives bornées.*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge. Montrer que toute primitive de f est bornée.

11 ♥ ★☆☆ Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ d'intégrale convergente sur l'intervalle I .

1. Montrer que si f est de signe constant sur I , alors

$$\left| \int_I f(t) dt \right| = \int_I |f(t)| dt.$$

2. Montrer que la réciproque est vraie.

- 12** ♥ ★☆☆ Soit $f \in \mathcal{C}([1, +\infty[, \mathbb{R})$ d'intégrale convergente sur $[1, +\infty[$. Montrer la convergence de

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt.$$

- 13** ★★☆☆ Intégrales de Fresnel.

. Montrer la convergence des intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt.$$

- 14** ♥ ★★☆☆ Soit f une fonction continue, intégrable, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right).$$

- 15** ★★☆☆ Montrer que la fonction

$$\varphi : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$$

définie sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

- 16** ♥ ★★☆☆ Transformée de Laplace.

Soit $f \in \mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$ telle que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge. Montrer :

$$\forall s > 0, \quad \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \text{ converge.}$$

- 17** ★★☆☆ Inégalité de Hardy.

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que f^2 est intégrable sur $[0, +\infty[$. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on pose

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

- Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.
- Montrer que pour tout $A \in [0, +\infty[$,

$$\int_0^A g^2(x) dx \leq 2 \int_0^A f(x)g(x) dx.$$

- Montrer que g^2 est intégrable sur $]0, +\infty[$, et

$$\int_0^{+\infty} g^2(x) dx \leq 4 \int_0^{+\infty} f^2(x) dx.$$

- Montrer que fg est intégrable sur $]0, +\infty[$, et

$$\int_0^{+\infty} g^2(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x)g(x) dx.$$

- 18** ♥ ★☆☆ Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

- Déterminer un équivalent en 0 de $\int_0^x t^{x-1} e^{-t} dt$.

- Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\int_0^y t^{x-1} e^{-t} dt$.

On pourra commencer par une intégration par parties.

- 19** ★★☆☆ Équivalent du reste de l'intégrale de Gauss.

Déterminer un équivalent lorsque $x \rightarrow +\infty$ de

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

On pourra commencer par une intégration par parties.

- 20** ★★☆☆ On considère la fonction

$$f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt.$$

- Montrer que f est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln x$.
- Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, et que

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Convergence dominée

- 21** ♥ ☆☆☆ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}} dt.$$

Montrer que I_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$, et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

- 22** ♥ ★☆☆ Soit $\alpha > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-nt}}{\sqrt{1+t^\alpha}} dt.$$

- Justifier l'existence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
- Déterminer un équivalent simple de I_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

- 23** ★☆☆ Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} e^{-nt} \frac{f(t)}{\sqrt{t}} dt.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence de I_n .
- On suppose $f(0) \neq 0$. Déterminer un équivalent simple de I_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

- 24** ♥ ★☆☆ Dans chacun des cas suivants, justifier l'existence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

1. $\int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n} dx.$	3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x) dx.$
2. $\int_1^{+\infty} \frac{n \ln(1+\frac{1}{nx})}{\sqrt{x}} dx.$	4. $\int_0^{+\infty} \frac{n \sin \frac{x}{n}}{x(1+x^2)} dx.$