

7. Suites et séries de fonctions

Suites de fonctions

1 ♥ ☆☆☆ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction

$$f_n : x \mapsto \mathbb{I}_{[n, n+1]}(x)$$

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonction $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$.

2 ♥ ★☆☆ Dans chacun des cas suivants, étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies sur $\mathbb{R}_+$.

- | | |
|--|---|
| 1. $f_n : x \mapsto \frac{nx}{1 + n^2 x^2}$.
2. $f_n : x \mapsto \frac{nx^3}{1 + nx^2}$.
3. $f_n : x \mapsto nx^2 e^{-nx}$. | 4. $f_n : x \mapsto nx^2 e^{-\sqrt{n}x}$.
5. $f_n : x \mapsto \frac{x \sin \frac{x}{n}}{x + \frac{1}{n}}$. |
|--|---|

3 ♥ ★☆☆ Étudier la convergence simple et uniforme sur $[0, 1]$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans chacun des cas suivants.

1. $f_n : x \mapsto \frac{n^3 x}{1 + n^2 x^2}$.
2. $f_n : x \mapsto n^\alpha x^n (1 - x)$, selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. $f_n : x \mapsto \frac{n e^{-x} + x^2}{n + x}$.
4. $f_n : x \mapsto (1 - x)^n \sin \frac{\pi x}{2}$.

4 ★★☆☆ Étudier la convergence simple et uniforme sur $[0, 1]$ de la suite de fonctions (f_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n : x \mapsto nx^n \sin(\pi x).$$

5 ★☆☆ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_n : x \mapsto n \cos^n(x) \sin(x)$$

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx.$$

Qu'en déduire ?

6 ★☆☆ On considère la suite de fonctions (f_n) définie par :

$$f_n : x \mapsto \cos^n(x) \sin(x).$$

Étudier la convergence simple et uniforme de (f_n) sur $[0, \pi]$.

7 ♥ ★☆☆ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$f_n : x \mapsto e^{-nx} \cos(nx).$$

Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{R}^*$, et sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

8 ♥ ★☆☆ On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} nx^n \ln x & \text{si } x \in]0, 1], \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f qu'on précisera.
2. A-t-on convergence uniforme de la suite sur $[0, 1]$?
3. Montrer que pour tout $a \in [0, 1[$, il y a convergence uniforme sur $[0, a]$.

9 ★☆☆ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_n : x \mapsto \frac{x^n}{1 + x + \dots + x^n}$$

1. Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[1, +\infty[$.
2. Calculer $\int_1^2 f_n(x) dx$.

10 ★☆☆ On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : x \mapsto (x^2 + 1) \frac{n e^x + x e^{-x}}{n + x}$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.
2. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (x^2 + 1) \frac{n e^x + x e^{-x}}{n + x} dx.$$

11 ★★☆☆ Soit (u_n) une suite de fonctions continues sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose par ailleurs

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |u_n(x)| \leq a_n,$$

où a_n est le terme général d'une série convergente. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$P_n : x \mapsto \prod_{k=0}^n (1 + u_k(x))$$

Montrer que la suite (P_n) converge uniformément.

12 ♥ ★★☆☆ On considère une fonction g continue sur

un segment $[a, b]$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$f_n : x \mapsto \frac{n}{1 + n^2 x^2}.$$

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) g(x) dx.$$

13 ♡ ★★★ Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur $\mathbb{R}_+$, telles que

- ◇ $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(0) = 0,$
- ◇ $(f'_n + 2f_n)$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+.$

Montrer que (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+.$

Séries de fonctions

14 ♡ Étudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la série de fonctions $\sum f_n$ dans les cas suivants.

1. ★★★ $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : x \mapsto \frac{x}{n(1 + nx)}.$
2. ★★★ $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : x \mapsto \frac{x}{(1 + nx)^2}.$

15 ♡ ★★★ On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$, où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n : x \mapsto \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n}$$

On pose, lorsque la somme est bien définie, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$

1. Montrer que S est bien définie, et dérivable sur $[0, 1].$
2. Calculer $S'(1).$

16 ★★★

1. a. Montrer que la fonction

$$F : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

est bien définie et continue sur $[0, +\infty[.$

b. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[.$

2. Soient $\sum c_n$ une série complexe absolument convergente et

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{int} \end{aligned}$$

Montrer que S est bien définie, continue, et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \int_0^{2\pi} S(t) e^{-ikt} dt = 2\pi c_k$$

17 ♡ ★★★ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}.$$

1. Montrer que S est bien définie, continue, décroissante et tend vers 0 en $+\infty.$

2. Montrer que $S(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln x.$

3. Montrer que

$$S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x}.$$

$$\text{On pourra utiliser } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

18 ★★★ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1 + kx}$$

1. Montrer que S est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*.$
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x).$