

6. Polynômes annulateurs et réduction

Sous-espaces stables

1 ♡ ★☆☆ Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u est diagonalisable. Montrer que u et v commutent si et seulement si les sous-espaces de propres de u sont stables par v .

2 ♡ ★☆☆ *Droite stable.*

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer qu'il existe une droite vectorielle de E stable par u .
2. Le résultat est-il encore vrai si E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ?

3 ★★★ Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe un hyperplan de E stable par u .

On pourra considérer $\text{Im}(u - \lambda \text{Id}_E)$, où $\lambda \in \text{Sp}(u)$.

4 Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant

$$u^2 + u - 2\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Caractériser tous les sous-espaces de E stables par u .

5 ★★★ Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ et $v \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire stable par u .
2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer que si tout sous-espace stable par u admet un supplémentaire stable par u , alors u est diagonalisable.

Polynômes annulateurs, réduction

6 ♡ ★☆☆

1. Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $A^p = I_n$, où $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que A est diagonalisable.
2. Le résultat est-il encore vrai si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

7 ♡ ★☆☆ Trouver toutes les matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ dont le spectre est réel et qui vérifient $A^3 = I_n$.

8 ♡ ★☆☆ Soit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de A .

2. Justifier que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de I_3 et A .

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer A^n en fonction de I_3 et A .

9 ♡ ★☆☆ Soit n un entier tel que $n \geq 2$. On note

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

1. Trouver un polynôme annulateur non nul de A .
2. Justifier que A est inversible et calculer son inverse.
3. Justifier que A est diagonalisable.

10 ★☆☆

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $A^3 = 4A$. Montrer que $\text{tr } A$ est un entier pair.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_n = 0$. Montrer que $\text{tr } A = 0$ et $\det A = 1$.

11 ★☆☆ On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Trouver un polynôme annulateur de $B = A - I_n$.
2. En déduire que A est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.

12 ★★★ Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ qui possède un polynôme annulateur $P \in \mathbb{K}[X]$ ayant 0 pour racine simple. Montrer que

$$E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u.$$

13 ★★★ Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det A > 0$.

14 ♡ ★☆☆ Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice non nulle non inversible telle que $A^3 = -A$. Montrer que A est semblable à

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

15 ★☆☆ Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose que $\text{tr } A = 0$, $\text{rg } A = 2$ et $A^3 \neq 0$. Étudier la diagonalisabilité de A .

16 ♡ ★★☆☆ *Matrices circulantes.*Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

1. Montrer que A est diagonalisable et la diagonaliser.
2. Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, diagonaliser la matrice

$$B = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{bmatrix}$$

et donner l'expression de son déterminant.

17 ★★☆☆ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$A \text{ est nilpotente} \Leftrightarrow \forall k \geq 1, \operatorname{tr}(A^k) = 0$$

Polynôme minimal, réduction

18 ♡ ☆☆☆ Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = u - \operatorname{Id}_E$. Déterminer le polynôme minimal de u .

19 ♡ ★☆☆ Dans chacun des cas suivants, déterminer le polynôme minimal de A , et préciser si A est diagonalisable.

$$\begin{array}{ll} 1. A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & 3. A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ 2. A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} & 4. A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

20 ★★☆☆ Soient un entier $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $A^n = I_n$ et que la famille $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est libre. Montrer que $\operatorname{tr} A = 0$.

21 ★★☆☆ Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. On considère $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer

$$P(u) \in \operatorname{GL}(E) \Leftrightarrow P \wedge \mu_u = 1.$$

22 ★★☆☆ *Polynôme minimal de l'inverse.*

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \operatorname{GL}(E)$. Comparer les polynômes minimaux μ_u et $\mu_{u^{-1}}$.

23 ★★☆☆ Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et $u \in \operatorname{GL}(E)$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si u^2 est

diagonalisable.

Le résultat est-il toujours vrai si E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ?