

6. Polynômes annulateurs et réduction

Sous-espaces stables

1 ♥ ★☆☆ Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u est diagonalisable. Montrer que u et v commutent si et seulement si les sous-espaces de propres de u sont stables par v .

2 ♥ ★☆☆ *Droite stable.*

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer qu'il existe une droite vectorielle de E stable par u .
2. Le résultat est-il encore vrai si E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ?

1. Comme χ_u est scindé dans $\mathbb{C}$, u admet une valeur propre, dont on note x un vecteur propre. Alors $\text{Vect}(x)$ est une droite vectorielle stable par u .
2. S'il existe une droite vectorielle $D = \text{Vect}(x)$ stable par u , alors x est un vecteur propre de u . Si $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ a pour matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique, alors u n'a pas de valeur propre, donc n'a pas de droite stable.

3 ★★☆☆ Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe un hyperplan de E stable par u .

On pourra considérer $\text{Im}(u - \lambda \text{Id}_E)$, où $\lambda \in \text{Sp}(u)$.

On remarque que si λ est une valeur propre dont le sous-espace propre est de dimension 1, alors $\text{Im}(u - \lambda \text{Id}_E)$ est de dimension $n - 1$, et est donc un hyperplan stable par u .

En toute généralité, si $F = \text{Im}(u - \lambda \text{Id}_E)$, on a $\dim F \leq n - 1$ par le théorème du rang. On peut compléter F en un hyperplan H de E (en complétant une base de F à l'aide d'une base de E). Montrons que H est stable par u : si $x \in H$,

$$u(x) = \underbrace{u(x) - \lambda x}_{\in F} + \underbrace{\lambda x}_{\in H} \in H.$$

4 ★★☆☆ Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant

$$u^2 + u - 2\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Caractériser tous les sous-espaces de E stables par u .

5 ★★☆☆ Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ et $v \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire stable par u .
2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer que si tout sous-espace stable par u admet un supplémentaire stable par u , alors u est diagonalisable.

Polynômes annulateurs, réduction

6 ♥ ★☆☆

1. Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $A^p = I_n$, où $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que A est diagonalisable.
2. Le résultat est-il encore vrai si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

1. Le polynôme $X^p - 1$ annule A et est simplement scindé sur $\mathbb{C}$ (ses racines sont les racines p -ème de l'unité), donc A est diagonalisable.
2. Non : par exemple, si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

alors $A^4 = I_2$, mais $\chi_A = X^2 + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

7 ♥ ★☆☆ Trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le spectre est réel et qui vérifient $A^3 = I_n$.

Si A est une telle matrice, le polynôme $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1) = (X - 1)(X - j)(X - j^2)$ est annulateur de A . On en déduit que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Par ailleurs, on a $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{1, j, j^2\}$.

Comme $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{R}$, on a en fait $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{1\}$. Comme A est diagonalisable, ceci entraîne que A est semblable à I_n , donc $A = I_n$.

Réciproquement, I_n est bien solution, et c'est donc la seule.

8 ♥ ★☆☆ Soit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de A .
2. Justifier que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de I_3 et A .
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer A^n en fonction de I_3 et A .

- On trouve $0 = A^2 + 2A - 3I_3 = (A - I_3)(A + 3I_3)$. Au passage, A est donc annulée par un polynôme simplement scindé, donc diagonalisable.
- On en déduit que $\text{Sp } A \subset \{1, -3\}$ donc A est inversible. Comme $A^2 + 2A = 3I_3$, on a $A(A + 2I_3) = 3I_3$ donc $A^{-1} = \frac{1}{3}(A + 2I_3)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, on effectue la division euclidienne de X^n par $(X - 1)(X - 3)$: il existe $(Q_n, R_n) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}_1[X]$ tel que

$$X^n = (X - 1)(X + 3)Q_n + R_n \quad (1)$$

et R_n est de la forme $a_n X + b_n$ avec $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Pour calculer a_n et b_n , on évalue (1) en 1 et -3 : on obtient $1 = a_n + b_n$ et $(-3)^n = -3a_n + b_n$, système 2×2 de Cramer (la matrice est inversible) qui a pour solution

$$a_n = \frac{1}{4}(1 - (-3)^n) \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{4}(3 + (-3)^n)$$

On évalue (1) en la matrice A : on obtient

$$A^n = a_n A + b_n = \frac{1}{4}((1 - (-3)^n)A + (3 + (-3)^n)I_3).$$

Autre idée : on diagonalise : il existe $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^n = P D^n P^{-1}$. On cherche α et β tels que $D^n = \alpha A + \beta I_3$.

- $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ annule A donc $\text{Sp } A \subset \{-i, i\}$ donc les racines complexes de χ_A sont dans $\{\pm i\}$. Comme $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, χ_A est à coefficients réels donc i et $-i$ sont racines de χ_A et ont même multiplicité.

$\text{tr } A$ est la somme des valeurs propres complexes de A (comptées avec leur multiplicité) donc $\text{tr } A = 0$.

$\det A$ est leur produit, donc $\det A$ est un produit de facteurs de la forme $i \times (-i)$ donc $\det A = 1$.

- 11** ★☆☆ On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

- Trouver un polynôme annulateur de $B = A - I_n$.
- En déduire que A est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.

- 12** ★★★ Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ qui possède un polynôme annulateur $P \in \mathbb{K}[X]$ ayant 0 pour racine simple. Montrer que

$$E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u.$$

1ère preuve. On peut écrire $P = XQ$, où $Q(0) \neq 0$, donc Q et X sont premiers entre eux. Par le lemme des noyaux, on a alors

$$E = \text{Ker } u \oplus \text{Ker } Q(u)$$

Montrons que $\text{Im } u = \text{Ker } Q(u)$: si $y \in \text{Im } u$, on peut écrire $y = u(x)$, donc $Q(u)(y) = Q(u)(u(x)) = (XQ)(u)(x) = 0_E$, donc $y \in \text{Ker } Q(u)$, ce qui donne $\text{Im } u \subset \text{Ker } Q(u)$. Par le théorème du rang, on a $\dim \text{Im } u = \dim E - \dim \text{Ker } u = \dim \text{Ker } Q(u)$, donc $\text{Im } u = \text{Ker } Q(u)$.

2ème preuve. Comme $\dim E = \dim \text{Ker } u + \dim \text{Im } u$, il suffit de montrer que $\text{Ker } u \cap \text{Im } u = \{0_E\}$.

Le polynôme P peut s'écrire $P = \sum_{k=1}^d a_k X^k$, avec $a_1 \neq 0$. Si $y \in \text{Ker } u \cap \text{Im } u$, alors on peut écrire $y = u(x)$, et $u^2(x) = u(y) = 0_E$. Ainsi

$$P(u)(x) = a_1 u(x) = 0_E$$

ce qui donne $y = 0_E$ et conclut.

- 13** ★★★ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det A > 0$.

- 14** ♥ ★☆☆ Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice non nulle non inversible telle que $A^3 = -A$. Montrer que A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 9** ♥ ★☆☆ Soit n un entier tel que $n \geq 2$. On note

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

- Trouver un polynôme annulateur non nul de A .
- Justifier que A est inversible et calculer son inverse.
- Justifier que A est diagonalisable.

$$A^2 = \begin{pmatrix} n-1 & n-2 & \dots & n-2 \\ n-2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n-2 \\ n-2 & \dots & n-2 & n-1 \end{pmatrix} = (n-2)A + (n-1)I_n.$$

$$\text{Ainsi, } A \times \frac{1}{n-1}(A - (n-2)I_n) = I_n.$$

Comme $X^2 - (n-2)X - (n-1) = (X-1)(X-(n-1))$ est annulateur de A , on en déduit que A est diagonalisable.

- 10** ★☆☆

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^3 = 4A$. Montrer que $\text{tr } A$ est un entier pair.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_n = 0$. Montrer que $\text{tr } A = 0$ et $\det A = 1$.

- Le polynôme $X^3 - 4X = X(X-2)(X+2)$ annule A donc $\text{Sp } A \subset \{-2, 0, 2\}$. Comme $\text{tr } A$ est la somme des valeurs propres complexes de A , $\text{tr } A$ est une somme de nombres pairs donc $\text{tr } A$ est un entier pair.

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ ayant pour matrice A dans la base canonique. Le polynôme $X^3 + X = X(X^2 + 1)$ annule u , donc par le lemme des noyaux, on a $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(u^2 + \text{Id})$.

On a $\dim \text{Ker } u \in \{1, 2\}$ car u est non nul non inversible. Par ailleurs, si $x \in \text{Ker}(u^2 + \text{Id})$ non nul, alors $(x, u(x))$ est libre : sinon, il existe λ tel que $u(x) = \lambda x$ (puisque $x \neq 0$), alors

$$-x = u^2(x) = \lambda^2 x$$

donc $\lambda^2 = -1$. Par ailleurs, $\text{Ker}(u^2 + \text{Id})$ est stable par u , donc $u(x) \in \text{Ker}(u^2 + \text{Id})$.

On a finalement $\dim \text{Ker}(u^2 + \text{Id}) = 2$ et $\dim \text{Ker } u = 1$. Si $e_1 \in \text{Ker } u \setminus \{0\}$, alors $(e_1, x, u(x))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et u a la matrice souhaitée dans cette base.

15 ★☆☆ Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose que $\text{tr } A = 0$, $\text{rg } A = 2$ et $A^3 \neq 0$. Étudier la diagonalisabilité de A .

Tout d'abord, $\text{rg } A = 2$ donc 0 est valeur propre de A . Comme $\text{tr } A = 0$, la somme des trois valeurs propres complexes de A est nulle, donc ces valeurs propres complexes sont 0, λ , $-\lambda$ (éventuellement confondues). On en déduit

$$\chi_A = X(X + \lambda)(X - \lambda) = X^3 - \lambda^2 X.$$

Ainsi, $\lambda \neq 0$: sinon $\chi_A = X^3$, et par Cayley-Hamilton $A^3 = 0$.

- Si $\lambda \in \mathbb{R}$, A a trois valeurs propres distinctes donc elle est diagonalisable.
- Si $\lambda \notin \mathbb{R}$ (dans ce cas $\lambda \in i\mathbb{R}$), la matrice n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

N.B. : Exemple dans le 2ème cas :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

16 ♥ ★★☆☆ Matrices circulantes.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

1. Montrer que A est diagonalisable et la diagonaliser.
2. Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, diagonaliser la matrice

$$B = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

et donner l'expression de son déterminant.

Indication.

1. Remarquer en examinant les puissances de A que $A^n = I_n$.
2. Remarquer que B est une combinaison linéaire de puissances de A .

17 ★★☆☆ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$A \text{ est nilpotente} \Leftrightarrow \forall k \geq 1, \text{tr}(A^k) = 0$$

Polynôme minimal, réduction

18 ♥ ☆☆☆ Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = u - \text{Id}_E$. Déterminer le polynôme minimal de u .

Comme $P = X^2 - X + 1$ annule u , on a $\mu_u \mid P$. Or comme P est de discriminant strictement négatif, il est irréductible dans $\mathbb{R}$, donc $\mu_u = 1$ ou $\mu_u = P$.

Si $E = \{0_E\}$, on a $\mu_u = 1$, sinon $\mu_u = P$.

19 ♥ ★☆☆ Dans chacun des cas suivants, déterminer le polynôme minimal de A , et préciser si A est diagonalisable.

$$1. A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$2. A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$3. A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$4. A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$5. A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$6. A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$7. A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$8. A = \begin{bmatrix} a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & a \end{bmatrix}.$$

1. On a $A^2 = 3A$, donc $X^2 - 2 - 3X = X(X - 3)$ annule A . Comme X et $X - 3$ n'annulent pas A , on a $\mu_A = X(X - 3)$. Comme μ_A est scindé à racines simples, A est diagonalisable.
2. $\chi_A = X(X - 2)(X - 4)$ est simplement scindé, donc $\mu_A = \chi_A$.
3. $\chi_A = (X - 1)^2(X - 2)$, donc $(X - 1)(X - 2) \mid \mu_A$, et $\mu_A \mid \chi_A$. Ainsi,

$$\mu_A \in \{(X - 1)(X - 2), (X - 1)^2(X - 2)\}.$$

Or $(A - I)(A - 2I) \neq 0$, donc $\mu_A = (X - 1)^2(X - 2)$. Ainsi, A n'est pas diagonalisable.

4. $\chi_A = (X - 1)^3$. Comme $A \neq I_3$, $\mu_A \neq X - 1$. Puis $(A - I_3)^2 \neq 0$, donc $\mu_A = (X - 1)^3$.

5. $\chi_A = \mu_A = X(X-1)(X-2)$.
6. $\chi_A = \mu_A = (X-1)(X-2)^2$.
7. $\mu_A = X(X-3)$.
8. $\mu_A = (X-(a+1))(X-(a-n+1))$.

20 ★★☆☆ Soient un entier $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $A^n = I_n$ et que la famille $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est libre. Montrer que $\text{tr } A = 0$.

Le polynôme $P = X^n - 1$ annule A , donc $\mu_A \mid P$. Par ailleurs, tout polynôme annulateur de A est de degré au moins n , sinon la famille $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ serait liée. On en déduit que $\mu_A = X^n - 1$, donc les valeurs propres sont exactement toutes les racines n -ème de l'unité, donc la somme est nulle. Ainsi, $\text{tr } A = 0$.

21 ★★☆☆ Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. On considère $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer

$$P(u) \in \text{GL}(E) \Leftrightarrow P \wedge \mu_u = 1.$$

22 ★★☆☆ *Polynôme minimal de l'inverse.*

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \text{GL}(E)$. Comparer les polynômes minimaux μ_u et $\mu_{u^{-1}}$.

On note

$$\mu_u = \sum_{k=0}^d a_k X^k, \quad \text{donc} \quad \sum_{k=0}^d a_k u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

On a $a_0 \neq 0$ car $u \in \text{GL}(E)$ donc 0 n'est pas racine de μ_u . En composant par u^{-d} dans la dernière égalité, on obtient

$$\sum_{k=0}^d a_k (u^{-1})^{d-k} = 0_{\mathcal{L}(E)}, \quad \text{donc} \quad \sum_{k=0}^d a_{d-k} (u^{-1})^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Ainsi, le polynôme $P = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^d a_{d-k} X^k$ est annulateur unitaire de u^{-1} .

Par conséquent, $\mu_{u^{-1}} \mid P$, et $\deg \mu_{u^{-1}} \leq \deg \mu_u$.

En inversant les rôles de u et u^{-1} , on a $\deg \mu_u \leq \deg \mu_{u^{-1}}$, donc il y a égalité, et $\mu_{u^{-1}} = P$.

23 ★★☆☆ Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et $u \in \text{GL}(E)$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si u^2 est diagonalisable.

Le résultat est-il toujours vrai si E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ?

Si u est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^2) = \text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2).$$

Si u^2 est diagonalisable, le polynôme minimal de u^2 est scindé

à racines simples $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Alors le polynôme

$$P = \prod_{i=1}^k (X^2 - \lambda_i)$$

annule u .

On note $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ des racines carrées complexes respectives de $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. On a alors

$$P = \prod_{i=1}^k (X - \alpha_i)(X + \alpha_i).$$

Comme $u \in \text{GL}(E)$, les valeurs propres sont toutes non nulles, donc les α_i sont tous non nuls et sont alors distincts de leur opposé. Ainsi, P est scindé à racines simples et annule u , donc u est diagonalisable.