

5. Espaces vectoriels normés

Normes

1 ♡ ★☆☆ Soient E un espace vectoriel et N_1, N_2 deux normes sur E . On note B_1 (resp. B_2) la boule unité fermée associée à la norme N_1 (resp. N_2). Montrer que si $B_1 = B_2$, alors $N_1 = N_2$.

Indication. Penser à renormaliser les vecteurs.

2 ★☆☆ *Diamètre d'une partie bornée.*

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Pour toute partie bornée A de E , on appelle diamètre de A le réel

$$\text{Diam } A = \sup \{\|y - x\|, x, y \in A\}.$$

1. Justifier l'existence de $\text{Diam}(A)$.
2. Montrer que si $A \cap B \neq \emptyset$, alors

$$\text{Diam}(A \cup B) \leq \text{Diam}(A) + \text{Diam}(B).$$

3 ★☆☆ Soit n en entier tel que $n \geq 2$. L'application

$$\begin{aligned} N : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ A &\mapsto \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda| \end{aligned}$$

est-elle une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Non : considérer une matrice triangulaire non nulle à diagonale nulle.

4 ♡ ★★☆☆ *Inégalités de Hölder et Minkowski.*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [1, +\infty[$. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et deux vecteurs $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$.

1. *Inégalité de Young.* Montrer que pour tous $u, v \in \mathbb{R}_+$,

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$

2. *Inégalité de Hölder.* En déduire :

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

On pourra commencer par supposer $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$.

3. a. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}.$$

b. *Inégalité de Minkowski.* En déduire

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

4. Montrer que si $p \in [1, +\infty[$, alors $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.
5. Montrer que

$$\|x\|_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \|x\|_\infty.$$

6. Montrer que, si on étend la définition de $\|\cdot\|_p$ au cas où $p \in]0, 1[$, alors $\|\cdot\|_p$ n'est pas une norme sur $\mathbb{K}^n$.
On pourra s'intéresser à la convexité de $B_{\|\cdot\|_p}(0, 1)$.

5 ★★☆☆ *Norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|_\infty$.*

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme donnée par

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\|_\infty = \max\{|x_i|, i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$$

et on note $\mathbb{S} = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\|_\infty = 1\}$. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note

$$N_\infty(A) = \sup_{X \in \mathbb{S}} \|AX\|_\infty.$$

1. Justifier que N_∞ est bien définie, et que pour tous $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\|AX\|_\infty \leq N_\infty(A) \|X\|_\infty.$$

2. Montrer que N_∞ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$N_\infty(A) = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

4. Faire le même travail en remplaçant la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par la norme $\|\cdot\|_1$.

Suites dans un EVN

6 ♡ ★☆☆ *Suites extraites.*

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que les sous-suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent.

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Notons ℓ, ℓ' et ℓ'' les limites respectives des suites (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{3n}) .

La suite $(u_{6n}) = (u_{2 \times 3n})$ est une sous-suite de (u_{2n}) donc elle converge vers ℓ . Comme $(u_{6n}) = (u_{3 \times 2n})$, c'est aussi une sous-suite de (u_{3n}) , donc elle converge également vers ℓ'' . Ainsi, $\ell = \ell''$.

La suite $(u_{6n+3}) = (u_{2(3n+1)+1})$ est une sous-suite de (u_{2n+1}) donc elle converge vers ℓ' . Comme $(u_{6n+3}) = (u_{3(2n+1)})$, c'est

aussi une sous-suite de (u_{3n}) , donc elle converge également vers ℓ'' . Ainsi, $\ell' = \ell''$.

Finalement, $\ell = \ell'$, donc on sait par le cours que (u_n) converge vers ℓ .

7 ★☆☆ On se place sur $E = \mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et on considère la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n : x \mapsto e^{inx}.$$

1. Pour $n, p \in \mathbb{N}$, calculer $\|f_n - f_p\|_\infty$.
2. Montrer que (f_n) n'a pas de sous-suite convergente.

1. Penser à la technique de l'angle moitié, on obtient :

$$\|f_n - f_p\|_\infty = \begin{cases} 2 & \text{si } n \neq p, \\ 0 & \text{si } n = p \end{cases}$$

2. Si $(f_{\varphi(n)})$ est une sous-suite convergente de (f_n) , alors

$$\|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\|_\infty \leq \|f_{\varphi(n+1)} - f\|_\infty + \|f - f_{\varphi(n)}\|_\infty$$

donc $\|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, par encadrement.

D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $\varphi(n+1) \neq \varphi(n)$, on a $\|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\|_\infty = 2$, ce qui contredit $\|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

8 ♥ ★☆☆ On munit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_1$ d'une part, et de la norme $\|\cdot\|_\infty$ d'autre part. On considère la suite (f_n) de E définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n : x \mapsto e^{-nx}.$$

1. Déterminer la limite de la suite (f_n) dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
2. a. Montrer que si (f_n) converge vers f dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$, alors

$$\forall x \in [0, 1], f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x).$$

b. En déduire que (f_n) diverge dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

9 ★★☆☆ Rayon spectral.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $A^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$. On note

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(A)\}.$$

Montrer que $\rho(A) < 1$.

Voir l'exercice "Rayon spectral 2" pour la réciproque.

10 ★★★★★ Convergence simple et norme.

Si F est un sous-espace vectoriel de $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $\|\cdot\|$ est une norme sur F , on dit que $\|\cdot\|$ vérifie la propriété $(\star)$ si pour toute fonction $f \in F$ et pour toute suite (f_n) de fonctions de F ,

$$\|f - f_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Leftrightarrow \forall t \in [0, 1], f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(t).$$

1. Montrer qu'il n'existe pas de norme sur E qui vérifie la propriété $(\star)$.

On pourra introduire une suite de fonctions affines par morceaux à support dans $[0, \frac{1}{n}]$.

2. On note F l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré au plus $d \in \mathbb{N}$ définies sur $[0, 1]$, et on fixe $a_0, \dots, a_d$ des réels distincts de $[0, 1]$.

a. Montrer qu'on définit une norme sur F en posant

$$\forall P \in F, \|P\| = \sum_{i=0}^n |P(a_i)|.$$

b. Montrer que $\|\cdot\|$ vérifie la propriété $(\star)$ dans F .

On pourra utiliser les polynômes d'interpolation de Lagrange.

11 ★★★★★ Convergence faible, convergence forte.

Soit E un espace préhilbertien muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\|\cdot\|$ sa norme associée et on considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E .

On dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers $x \in E$ si

$$\forall y \in E, \langle x_n - x, y \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

1. a. Montrer que si (x_n) converge faiblement, alors sa limite est unique.
b. Montrer que si (x_n) converge vers $x \in E$, alors (x_n) converge faiblement vers x .
2. Montrer que (x_n) converge vers $x \in E$ si et seulement si (x_n) converge faiblement vers x et $\|x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|x\|$.
3. Montrer que si E est de dimension finie, alors la convergence faible est équivalente à la convergence.
4. Donner un contre-exemple en dimension infinie.

12 ★★★★★ Rayon spectral 2.

Pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, on note

$$\|A\| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|, \quad \text{et} \quad \|A\|_P = \|P^{-1}AP\|.$$

1. Montrer que si $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$,

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \|AB\|_P \leq \|A\|_P \|B\|_P.$$

2. On note $\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$. On suppose que $\rho(A) < 1$.

a. Montrer : $\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{C}), \|A\|_P < 1$.

b. En déduire que $A^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$.

3. Montrer que la série $\sum A^k$ converge si et seulement si $\rho(A) < 1$. Que vaut sa somme en cas de convergence ?

13 ♥ Suites de Cauchy dans un EVN.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On dit qu'une suite (u_n) de E est une suite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, p \geq N, \|u_n - u_p\| < \varepsilon.$$

1. ☆☆☆ Montrer que toute suite convergente de E est de Cauchy.

2. ★★☆☆ Montrer que si toute suite de Cauchy de E est convergente, et (u_n) est une suite de E , alors

$$\sum \|u_n\| \text{ converge} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge.}$$

3. ★★★★★ Réciproquement, montrer que si pour toute suite (u_n) de E , la convergence de $\sum \|u_n\|$ implique celle de $\sum u_n$, alors toute suite de Cauchy de E converge.

On pourra chercher à construire une sous-suite convergente d'une suite de Cauchy.

Comparaison de normes

14 ♡ ★☆☆ Normes sur $\mathbb{K}[X]$.

Pour tout polynôme $P = \sum_{i=0}^d a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$, on pose

$$N_1(P) = \sum_{i=0}^d |a_i|, \quad N_2(P) = \sqrt{\sum_{i=0}^d a_i^2},$$

$$N_\infty(P) = \max\{|a_i|, i \in \llbracket 0, d \rrbracket\}.$$

1. Montrer que N_1, N_2, N_∞ sont des normes sur $\mathbb{K}[X]$.
2. Ces normes sont-elles équivalentes ?

1. La positivité, l'homogénéité et la séparation sont claires. L'inégalité triangulaire se montre en considérant $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et en utilisant le fait que $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^{d+1}$, où $d = \max(\deg P, \deg Q)$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} X^i$. On a alors

$$N_1(P_n) = \sqrt{n}, \quad N_2(P_n) = 1, \quad N_\infty(P_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

La suite $(P_n)_n$ est non bornée pour N_1 , bornée pour N_2 et N_∞ . Par ailleurs, elle converge vers 0 pour N_∞ , mais pas pour N_2 . Finalement, les normes ne sont pas équivalentes.

15 ★☆☆ D'autres normes sur $\mathbb{K}[X]$.

Pour tout polynôme $P = \sum_{i=0}^d a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$, on pose

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^d |P^{(k)}(0)|, \quad N_2(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|.$$

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{K}[X]$.
2. Ces normes sont-elles équivalentes ?

1. L'homogénéité est claire, l'inégalité triangulaire provient de celle de la valeur absolue. La séparation est donnée par le fait que $a_k = P^{(k)}(0)/k!$ pour tout k (par la formule de Taylor polynomiale), donc si $N_1(P) = 0$, alors les coefficients de P sont nuls.

L'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont claires pour N_2 . La séparation est donnée par le fait qu'un po-

lynôme qui s'annule sur une infinité de points est nul.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = a_n X^n$ avec $a_n \in \mathbb{R}$. On a alors $N_1(P_n) = n! a_n$ et $N_2(P_n) = |a_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si on choisit $a_n = 1$ par exemple, on a $N_1(P_n) = n!$ et $N_2(P_n) = 1$. Ainsi, (P_n) est bornée pour N_2 , mais non bornée pour N_1 . Les normes ne sont pas équivalentes.

16 ♡ ★☆☆ Normes sur $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$.

On munit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ d'une part de la norme $\|\cdot\|_\infty$, d'autre part de la norme N donnée par :

$$\forall f \in E, \quad N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'|.$$

1. Vérifier que N est bien une norme.
2. Montrer que pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq N(f)$.
3. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ et N ne sont pas équivalentes.

On pourra introduire la suite de fonctions (f_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : x \mapsto \sin(nx)$.

17 Normes sur $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

Soit $(a_n)_{n \geq 1} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$. On note $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et pour tout $f \in E$, on pose

$$\|f\| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|f(a_n)|}{2^n}.$$

1. ★★☆☆ Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E si et seulement si l'ensemble $A = \{a_n, n \geq 1\}$ est dense dans $[0,1]$.
2. ★★★★★ Dans ce cas, la norme $\|\cdot\|$ est-elle équivalente à la norme $\|\cdot\|_\infty$?

1. Tout d'abord, si $f \in E$, alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|f(a_n)|}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \|f\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

Supposons que A n'est pas dense dans $[0,1]$. Il existe donc un intervalle $[a,b] \subset [0,1] \setminus A$ avec $a < b$. On peut alors construire une fonction f de E affine par morceau sur $[0,1]$, nulle en dehors de $[a,b]$, non nulle sur $]a,b[$. Ainsi, on a $f(a_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui donne $\|f\| = 0$, mais f est non nulle, donc $\|\cdot\|$ n'est pas une norme sur E .

Si maintenant A est dense dans $[0,1]$, montrons que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E . La positivité, l'homogénéité sont claires. L'inégalité triangulaire provient de l'I.T. de la valeur absolue : $|f(a_n) + g(a_n)| \leq |f(a_n)| + |g(a_n)|$. D'autre part, si $\|f\| = 0$, alors pour tout $x \in [0,1]$, il existe une sous-suite (b_n) dans A telle que $b_n \rightarrow x$. Comme pour tout n , $f(b_n) = 0$, on a $f(x) = 0$ par continuité de f . Finalement, f est nulle.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait qu'on peut trouver un intervalle $[a,b]$ avec $a < b$ dans $[0,1] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. On construit alors une fonction f_n de E affine par morceaux qui est nulle en dehors de $[a,b]$, et telle que $\|f_n\|_\infty = 1$. Ainsi,

pour tout $k \leq n$, on a $f(a_k) = 0$. Par conséquent,

$$\|f\| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|f(a_k)|}{2^k} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}.$$

Ainsi, on a $\|f_n\|_\infty = 1$ pour tout n , mais $\|f_n\| \rightarrow 0$, donc les normes ne sont pas équivalentes.