

4. Séries – Familles sommables

Nature de séries, calculs de sommes

1 ♥ ★☆☆ Dans chacun des cas suivants, étudier la nature de la série $\sum u_n$.

- | | |
|--|--|
| 1. $u_n = \frac{e^n}{n!}$.
2. $u_n = \sin \frac{1}{n^2}$.
3. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
4. $u_n = \frac{1}{n^2 \ln n}$.
5. $u_n = \frac{\ln n}{n^2}$.
6. $u_n = \frac{n\sqrt{n}}{2^n + n}$. | 7. $u_n = n^{\frac{1}{n^2}} - 1$.
8. $u_n = n^{\frac{1}{n}} - (n+1)^{\frac{1}{n}}$.
9. $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.
10. $u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.
11. $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$. |
|--|--|

Indication.

1. Règle de d'Alembert.
2. $u_n \sim \frac{1}{n^2}$.
3. $u_n \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
4. $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$.
5. $n^{3/2} u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $u_n = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.
6. $n^2 u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
7. $u_n \sim \frac{\ln n}{n^2}$.
8. $u_n \sim -\frac{1}{n^2}$.
9. $u_n = e^{-n^2 \ln(1+\frac{1}{n})} = e^{-n+\frac{1}{2}+o(\frac{1}{n})} \sim e^{-n} \sqrt{e}$.
10. $n^2 u_n = e^{2 \ln n} e^{-\ln n \ln(\ln n)} = e^{(2-\ln(\ln n)) \ln n}$
 Pour n assez grand, on a $2 - \ln(\ln n) < 0$, donc

$$n^2 u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

$$11 \quad u_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}, \text{ or } \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln \frac{1}{n}} \rightarrow 1, \text{ donc } u_n \sim \frac{1}{n}.$$

2 ♥ ★★☆☆ Dans chacun des cas suivants, étudier la nature de la série $\sum u_n$.

- | | |
|--|---|
| 1. $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.
2. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$. | 3. $u_n = \frac{1}{n \ln^2(n)}$.
4. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n(n+k)}$. |
|--|---|

1. On a

$$\begin{aligned} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) &= \sin\left(\pi n \left(1 + \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right) \\ &= \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (-1)^n \left(\frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \end{aligned}$$

Donc la série est somme d'une série convergente (par le critère des séries alternées), et une série absolument convergente, elle converge.

$$4. \quad u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \sim \frac{\ln 2}{n} \text{ car par somme de Riemann,}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2.$$

La série diverge.

3 ★☆☆ Dans chacun des cas suivants, calculer la somme de la série.

- | | |
|--|--|
| 1. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$.
2. $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.
3. $\sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{n!}$. | 4. $\sum_{n \geq 0} \frac{\cos n}{2^n}$.
5. $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$. |
|--|--|

On rappelle que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.

4 ♥ ★☆☆ Séries de Bertrand.

1. Selon les valeurs de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, déterminer la nature de la série

$$\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}.$$

2. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ de terme général :

$$u_n = \frac{(e - (1 + \frac{1}{n})^n) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$$

Indication.

1. Comparaison série intégrale.
2. Rechercher un équivalent de u_n .

5 ★☆☆ Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} - \frac{1}{e} \right)^\alpha$$

Selon la valeur de α , étudier la nature de $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$.

- ◇ $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
 ◇ $\sum (-1)^n u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

6 ♥ ★☆☆ Soit (u_n) une suite réelle décroissante telle que $\sum u_n$ converge. Montrer que

$$u_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On pourra considérer $S_{2n} - S_n$, où (S_n) est la suite des sommes partielles.

Comme $\sum u_n$ converge, on a $S_{2n} - S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Or par décroissance, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geq \sum_{k=n+1}^{2n} u_{2n} = n u_{2n} (\geq 0).$$

Ainsi, par encadrement, on a $2n u_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Par ailleurs,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq (2n+1) u_{2n+1} \leq (2n+1) u_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

car $2n u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $(2n+1) u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On en déduit que $n u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui conclut.

7 ★☆☆ Soit $u_0 \in]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, 1[$. En déduire que

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

2. Montrer que $\sum u_n^2$ converge et déterminer sa somme.

3. Montrer que $\sum \ln \frac{u_{n+1}}{u_n}$ diverge.

4. Quelle est la nature de $\sum u_n$?

1. On montre par une rapide récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n < 1$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 < 0$, donc la suite $(u_n)_n$ est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers un réel ℓ .

$$\text{On a donc } u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \text{ et } u_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell^2.$$

Par passage à la limite, on en déduit que $\ell = \ell - \ell^2$, ce qui donne $\ell^2 = 0$, puis $\ell = 0$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^n u_k^2 = \sum_{k=0}^n (u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u_0,$$

car la somme obtenue est télescopique. Ceci montre la convergence de la série $\sum u_n^2$, dont la somme vaut u_0 .

3. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \ln \frac{u_{k+1}}{u_k} &= \sum_{k=0}^n (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) \\ &= \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0), \end{aligned}$$

car la somme est télescopique.

Comme $u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$, et

$\sum_{n \geq 0} \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$ diverge.

4. On a $\ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = \ln(1 - u_n) \sim -u_n$ car $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi, comme la série à termes positifs $-\sum \ln(1 - u_n)$ est divergente, on en déduit que la série $\sum u_n$ est divergente.

8 ★☆☆ Soient $a, b > 0$ et une suite (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{n+a}{n+b} u_n$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \ln(n^\alpha u_n)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de

$$\sum (v_{n+1} - v_n).$$

2. En déduire un équivalent de u_n .

3. (5/2) Déterminer la nature de la série $\sum u_n$, où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

9 ♥ ★★☆☆ Formule de Stirling.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{e^n}{n^n \sqrt{n}} n!$$

1. Déterminer la nature de la série

$$\sum (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)).$$

2. En déduire l'existence d'un réel $K > 0$ tel que

$$n! \sim K \sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n.$$

1. On a

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{e^{n+1} (n+1)! n^n \sqrt{n}}{(n+1)^{n+1} \sqrt{n+1} e^n n!} \\ &= e \frac{n^n}{(n+1)^n} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \\ &= e \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} &= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= 1 - \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).\end{aligned}$$

Par conséquent, $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et la série converge absolument.

2. $(\ln(u_n))$ est de même nature que $\sum \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$, donc converge vers un réel ℓ . Ainsi, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^\ell$.

En posant $K = e^\ell > 0$, on a bien le résultat.

- 10** ♥ ★☆☆ Montrer la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} - \ln(n).$$

Indication. Montrer que $\sum u_{n+1} - u_n$ converge.

- 11** ★☆☆ Règle de Raabe-Duhamel.

1. *Comparaison logarithmique.* Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose qu'à partir d'un certain rang,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Montrer que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge, et si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

2. On considère une suite (u_n) de $\mathbb{R}_+^*$ et un réel $a > 0$ tels que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Montrer que si $a > 1$ alors $\sum u_n$ converge, et si $a < 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

3. Que dire du cas $a = 1$?

- 12** ★☆☆ Règle de Raabe-Duhamel (2).

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \ln(n^a u_n)$. Montrer qu'il existe $\gamma > 0$ tel que $u_n \sim \frac{\gamma}{n^a}$.
2. En déduire un critère de convergence pour la série $\sum_n u_n$.

- 13** ★☆☆ Critère de condensation de Cauchy.

1. On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ décroissante de réels positifs. Montrer que

$$\sum_n u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_n 2^n u_{2^n} \text{ converge}.$$

2. Retrouver la condition nécessaire et suffisante sur $\beta \in \mathbb{R}$ pour que la série de Bertrand

$$\sum \frac{1}{n \ln^\beta n}$$

soit convergente.

- 14** ★★☆☆ Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$I_n = \int_0^1 (1 - x^p)^n dx.$$

1. Montrer que si une suite (u_n) vérifie

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{np} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

alors la suite $\left(u_n + \frac{\ln n}{p}\right)$ converge.

2. Établir une relation de récurrence pour la suite (I_n) .

3. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $I_n \sim \frac{a}{n^{1/p}}$.

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n + \frac{\ln n}{p}$. Alors

$$\begin{aligned}v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{p} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= -\frac{1}{np} + \frac{1}{np} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge, donc la suite (v_n) également.

2. On écrit

$$I_{n+1} = \int_0^1 (1 - x^p)^{n+1} dx = \int_0^1 x^p (1 - x^p)^n dx$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}I_{n+1} - I_n &= \frac{1}{p} \int_0^1 -p x^{p-1} (1 - x^p)^n dx \\ &= -\frac{1}{p} \int_0^1 \frac{(1 - x^p)^{n+1}}{n+1} dx = -\frac{I_{n+1}}{p(n+1)}\end{aligned}$$

par IPP, ce qui donne

$$I_{n+1} = \frac{p(n+1)}{p(n+1)+1} I_n.$$

3. On applique la question 1 à la suite de terme général $u_n = \ln(I_n)$. On a

$$\begin{aligned}\ln(I_{n+1}) - \ln(I_n) &= \ln \left(1 - \frac{1}{p(n+1)+1}\right) \\ &= -\frac{1}{pn} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Alors, $\left(\ln(I_n) + \frac{\ln n}{p}\right)$ converge, vers un réel ℓ . En composant par exp,

$$I_n n^{1/p} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^\ell.$$

En posant $a = e^\ell$, on a bien le résultat.

Transformation d'Abel

15 ♡ ★☆☆ Soit (u_n) une suite de réels telles que $\sum u_n$ et $\sum |u_{n+1} - u_n|$ convergent. Montrer que $\sum u_n^2$ est convergente.

On fait une transformation d'Abel : on note (S_n) la suite des sommes partielles de $\sum u_n$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n u_k^2 &= \sum_{k=1}^n u_k(S_k - S_{k-1}) + u_0^2 \\ &= \sum_{k=0}^n u_k S_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} S_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) S_k + u_n S_n \end{aligned}$$

Comme (S_n) converge, elle est bornée, disons par M .

- $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $u_n S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- $|(u_k - u_{k+1}) S_k| \leq M |u_k - u_{k+1}|$.

Ceci assure que $\left(\sum_{k=0}^n u_k^2\right)$ converge.

16 ★★☆☆ On considère une suite réelle (u_n) décroissante telle que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = n(u_n - u_{n+1}).$$

Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature, et même somme en cas de convergence.

On a par transformation d'Abel :

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n u_k(k - (k-1)) = \sum_{k=0}^{n-1} k(u_k - u_{k+1}) + nu_n.$$

donc

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^{n-1} v_k + nu_n.$$

- Si $\sum u_n$ converge, alors on peut montrer (voir exercice plus haut) que comme (u_n) décroît, on a $nu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ce qui précède donne donc la convergence de $\sum v_n$, et la somme est la même.

- Si maintenant $\sum v_n$ converge, alors il faut encore étudier le comportement de nu_n :

$$nu_n = n \sum_{k=n}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) = n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{v_k}{k} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} v_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

d'où la convergence de $\sum u_n$, et la somme est à nouveau la même.

17 ★★☆☆ Soient $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\alpha > 0$. Montrer

$$\sum u_n \text{ converge} \Rightarrow \sum \frac{u_n}{n^\alpha} \text{ converge.}$$

Techniques asymptotiques

18 ♡ ★☆☆ Déterminer un équivalent simple de

$$u_n = \ln(n!).$$

Comparaison série intégrale :

$$\int_1^n \ln(t) dt \leq \sum_{k=2}^n \ln(k) \leq \int_2^{n+1} \ln(t) dt$$

Ou même

$$\int_1^n \ln(t) dt \leq \sum_{k=2}^n \ln(k) \leq \int_1^n \ln(t) dt + \ln(n).$$

Comme

$$\int_1^n \ln(t) dt = n \ln(n) - n + 1$$

On obtient par encadrement que $\ln(n!) \sim n \ln n$.

19 ★☆☆ Déterminer un équivalent de

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1. En utilisant une comparaison série-intégrale.
2. En utilisant une somme de Riemann.

20 ★☆☆

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel $u_n > 0$ tel que

$$e^{u_n} + nu_n = 2.$$

2. Déterminer la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$.
3. Déterminer un développement asymptotique de u_n à la précision $\frac{1}{n^2}$.

1. La fonction $f_n : x \mapsto e^x + nx - 2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, continue, et $f_n(0) = -1$, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

2. On a

$$0 < u_n \leq \frac{2 - e^{u_n}}{n} \leq \frac{2}{n}$$

donc par encadrement, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi, $nu_n = 2 - e^{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, donc $u_n \sim \frac{1}{n}$, donc $\sum u_n$ dv.

On a $f_n(u_{n+1}) < 0 = f_n(u_n)$, donc la suite est décroissante. Ainsi, $\sum (-1)^n u_n$ cv.

3. On a

$$\begin{aligned} nu_n &= 2 - (1 + u_n + o(u_n)) \\ &= 1 - u_n + o(u_n) \end{aligned}$$

Donc $(n+1)u_n = 1 + o(u_n)$, puis

$$u_n = \frac{1}{n+1} + o\left(\frac{u_n}{n+1}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On peut aussi écrire $u_n = \frac{1}{n} + v_n$, et injecter :

$$1 + nv_n = 2 - \left(1 + \frac{1}{n} + v_n + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\text{donc } v_n = -\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

21 ♥ ★☆☆ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

- Justifier que $\sum u_n$ converge.
- Déterminer un équivalent de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.
- Donner un équivalent de

$$u_n - \frac{1}{n(n+1)}$$

et en déduire un développement asymptotique de R_n à la précision $\frac{1}{n^2}$.

- On a $u_n \sim \frac{1}{n^2}$.
- Par équivalence des restes, on a $R_n \sim \frac{1}{n}$.
- On a $u_n - \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{2n^3}$.

Par équivalence des restes et par télescopage, on a

$$R_n - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En écrivant un DL de $\frac{1}{n+1}$, on obtient

$$R_n = \frac{1}{n} - \frac{3}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

22 ★★☆☆ Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs convergente telle que

$$u_n \sim R_n^2,$$

où (R_n) désigne la suite des restes de la série. En considérant la suite (v_n) de terme général

$$v_n = \frac{1}{R_n} - \frac{1}{R_{n-1}}$$

déterminer un équivalent simple de u_n .

On a $R_{n-1} - R_n = u_n$, donc $R_{n-1} - R_n \sim R_n^2$. Ainsi,

$$v_n = \frac{R_{n-1} - R_n}{R_n R_{n-1}} \sim \frac{R_n}{R_{n-1}}.$$

Or on a

$$\frac{R_{n-1}}{R_n} = 1 + \frac{u_n}{R_n}.$$

Comme $\frac{u_n}{R_n} \sim R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par hypothèse, on a alors

$$\frac{R_{n-1}}{R_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1, \text{ donc } v_n \sim 1$$

d'après ce qui précède. On a donc équivalence des sommes partielles :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} - \frac{1}{R_{n-1}} \sim \sum_{k=1}^n 1$$

ce qui donne $\frac{1}{R_n} \sim n$, donc $R_n \sim \frac{1}{n}$, et $u_n \sim \frac{1}{n^2}$.

Familles sommables

23 ♥ ★☆☆ Calculer la somme $\sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$.

24 ★☆☆ Pour tout couple $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on note

$$a_{n,m} = \frac{1}{(n+m^2)(n+m^2+1)}$$

Montrer que la famille $(a_{n,m})_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$ est sommable et donner sa somme.

On fixe $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N a_{n,m} &= \sum_{n=0}^N \frac{1}{n+m^2} - \frac{1}{n+1+m^2} \\ &= \frac{1}{m^2} - \frac{1}{N+1+m^2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{m^2}. \end{aligned}$$

Comme $\sum \frac{1}{m^2}$ est convergente, la famille est sommable, et sa somme vaut $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

25 ★☆☆ Somme des restes de la série exponentielle.

Calculer :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!} &= \sum_{\substack{(k,n) \in \mathbb{N}^2 \\ k \geq n}} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^k \frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} + \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

par sommation d'une famille de $\mathbb{R}_+$. On obtient que la série est convergente, et vaut $2e$.

26 ♥ ★☆☆ Somme des restes de la série de Riemann.

Déterminer les réels α tels que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} < +\infty.$$

Comme dans l'exercice précédent,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}}$$

On a donc sommabilité si et seulement si $\alpha > 2$.

27 ♥ ★★☆☆ Déterminer tous les réels α tels que

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{(i+j)^\alpha} < +\infty.$$

28 ★★☆☆ Montrer que la famille

$$\left(\frac{1}{x^2} \right)_{x \in \mathbb{Q} \cap [1, +\infty[}$$

n'est pas sommable.

29 ♥ ★☆☆☆ Calculer la somme

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

On a par Fubini-Tonelli,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Comme $\sum \frac{1}{n^2} < +\infty$, la famille est sommable. Ainsi, on peut appliquer Fubini (cas général) :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Ainsi, la somme vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

30 ★★☆☆ Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$.

1. Montrer que la famille $(x^{kl})_{(k,l) \in \mathbb{N}^{*2}}$ est sommable.
2. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) x^n,$$

où $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs positifs de n .

31 ★★☆☆ On note A l'ensemble des entiers de $\mathbb{N}^*$ qui n'ont pas de 9 dans leur écriture décimale. Montrer que

$$\sum_{n \in A} \frac{1}{n} < +\infty.$$