

### 3. Réduction des endomorphismes

#### Spectre, polynôme caractéristique

**1** ☆☆☆ *Spectre de l'inverse.*

Soient  $E$  un espace vectoriel et  $u \in \text{GL}(E)$ . Montrer que

$$\text{Sp}(u^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda}, \lambda \in \text{Sp } u \right\}.$$

Montrer que pour tout  $\lambda \in \text{Sp } u$ ,

$$E_\lambda(u) = E_{\frac{1}{\lambda}}(u^{-1}).$$

**2** ♥ ☆☆☆ *Translation/dilatation du spectre.*

Soient  $E$  un espace vectoriel,  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Exprimer  $\text{Sp}(\alpha u)$  et  $\text{Sp}(u + \alpha \text{Id}_E)$  en fonction de  $\text{Sp } u$ .

**3** ♥ ☆☆☆ Soient  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ . Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

1. Si  $A$  et  $B$  sont diagonalisables,  $A + B$  l'est également.
2. Si  $A$  et  $B$  sont trigonalisables,  $A + B$  l'est également.
3.  $0 \in \text{Sp } A \Leftrightarrow 0 \in \text{Sp}(A^2)$ .
4.  $\text{Sp } A^2 = \{\lambda^2, \lambda \in \text{Sp } A\}$ .

**4** ☆☆☆ Soient  $A \in M_n(\mathbb{Z})$  et  $p \in \mathbb{Z}$  tels que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = p.$$

1. Montrer que  $p \in \text{Sp}(A)$ .
2. Montrer que  $p$  divise  $\det A$ .

**5** ♥ ☆☆☆ Soient  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  tels que  $u$  et  $v$  commutent. Montrer que  $u$  et  $v$  ont au moins un vecteur propre commun.

**6** ☆☆☆ Soient  $n \in \mathbb{N}$  un entier impair et  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{U}$  et  $\det A = 1$ . Montrer que 1 est valeur propre de  $A$ .

**7** ☆☆☆ *Dimension infinie.*

Soient  $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  l'espace des suites complexes et  $T \in \mathcal{L}(E)$  défini par

$$\forall u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, T(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de  $T$  et les sous-espaces propres associés.
2. Même question en changeant  $E$  en l'espace  $\ell^\infty$  des suites complexes bornées. Représenter  $\text{Sp}(T)$  dans le plan complexe.

**8** ☆☆☆ On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

1. Pour tout  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ , calculer

$$D_n(\theta) = \det(A + 2 \cos \theta I_n).$$

2. En déduire les valeurs propres de  $A$ .

**9** ☆☆☆ *Matrices stochastiques.*

Soit  $M \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice telle que

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, m_{i,j} \geq 0, \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1.$$

1. Montrer que 1 est valeur propre de  $M$ .
2. Montrer que pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(M)$ ,  $|\lambda| \leq 1$ .

**10** ☆☆☆ *Disques de Gershgorin.*

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ .

1. Montrer que  $\text{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n D_i$ , où pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$D_i = \left\{ z \in \mathbb{C}, |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \right\},$$

$$\text{puis } \text{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n \tilde{D}_i, \text{ où pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket,$$

$$\tilde{D}_i = \left\{ z \in \mathbb{C}, |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{j,i}| \right\}.$$

2. On dit que  $A$  est à diagonale strictement dominante si

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que si  $A$  est à diagonale strictement dominante, alors  $A$  est inversible.

**11** ♥ ☆☆☆ *Matrice compagnon.*

Soit  $P$  un polynôme unitaire de  $\mathbb{K}_n[X]$ , noté :

$$P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$$

On pose

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Montrer qu'alors  $\chi_A = P$ . On dit que  $A$  est la *matrice compagnon* du polynôme  $P$ .

## Diagonalisation

**12** ♡ ★☆☆ Diagonaliser les matrices suivantes, en visant la démarche la plus efficace.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & j & j^2 \\ j^2 & 1 & j \\ j & j^2 & 1 \end{bmatrix}.$$

**13** ★☆☆ *Matrice à paramètre.*

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Déterminer les valeurs propres de  $A$ .
- Déterminer les valeurs de  $a \in \mathbb{R}$  telles que  $A$  soit diagonalisable.

**14** ★☆☆ *Matrice à paramètre.*

Étudier, en fonction des paramètres  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{K}$ , la diagonalisabilité de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 2 & 0 \\ d & e & f & 2 \end{bmatrix}$$

**15** ♡ ★☆☆ Montrer qu'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de rang 1 est diagonalisable si et seulement si  $\text{tr } A \neq 0$ .

**16** ♡ ★☆☆ L'endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$  défini par

$$\begin{aligned} u : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A &\mapsto A + \text{tr}(A)I_n \end{aligned}$$

où  $n \in \mathbb{N}^*$ , est-il diagonalisable ?

**17** ♡ ★☆☆ Soient  $a, b \in \mathbb{K}$  et un entier  $n \in \mathbb{N}^*$ . On

considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & b & a & \dots \\ b & a & b & \dots \\ a & b & a & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K}).$$

- Selon les valeurs de  $a$  et  $b$ , déterminer le rang de  $A$ .
- Montrer que  $A$  est diagonalisable.

**18** ★★☆☆ Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie,  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  distincts tels que

$$(u - \lambda \text{Id}_E) \circ (u - \mu \text{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Montrer que  $u$  est diagonalisable.

**19** ★★☆☆ Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $\chi_A$  est scindé à racines simples. Montrer qu'il existe un nombre fini de matrices  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telles que

$$M^3 - 3M = A.$$

**20** ★★☆☆ Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice diagonalisable et

$$M = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline I_n & 0 \end{array} \right] \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C}).$$

- Exprimer les valeurs propres de  $M$  en fonction des valeurs propres de  $A$ .
- Montrer que  $M$  est diagonalisable si et seulement si  $A$  est inversible.

**21** ★★☆☆ Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

- Si  $u$  est diagonalisable, a-t-on  $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$  ?
- Si  $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$ , a-t-on  $u$  diagonalisable ?

**22** ♡ ★★☆☆ *Diagonalisation simultanée.*

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose que  $f \circ g = g \circ f$ , et  $f$  admet  $n$  valeurs propres distinctes.

- Montrer que tout vecteur propre de  $f$  est vecteur propre de  $g$ .
  - En déduire que  $f$  et  $g$  sont diagonalisables dans une même base de  $E$ .
- Application.* On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Déterminer le nombre de solutions  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  de l'équation

$$2M^2 + 5M = 3A.$$