

3. Réduction des endomorphismes

Spectre, polynôme caractéristique

1 ☆☆☆ Spectre de l'inverse.

Soient E un espace vectoriel et $u \in GL(E)$. Montrer que

$$\text{Sp}(u^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda}, \lambda \in \text{Sp } u \right\}.$$

Montrer que pour tout $\lambda \in \text{Sp } u$,

$$E_\lambda(u) = E_{\frac{1}{\lambda}}(u^{-1}).$$

Soit $u \in GL(E)$. Comme u et u^{-1} sont injectifs, 0 n'est pas dans leur spectre. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$,

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp } u &\Leftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0\}, u(x) = \lambda x \\ &\Leftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0\}, x = u^{-1}(\lambda x) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0\}, u^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda} x \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \in \text{Sp}(u^{-1}) \end{aligned}$$

donc $\text{Sp}(u^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda}, \lambda \in \text{Sp } u \right\}$.

Soit $\lambda \in \text{Sp } u$. En reprenant le calcul précédent, pour tout $x \in E$,

$$x \in E_\lambda(u) \Leftrightarrow u(x) = \lambda x \Leftrightarrow u^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda} x \Leftrightarrow x \in E_{\frac{1}{\lambda}}(u^{-1})$$

donc $E_\lambda(u) = E_{\frac{1}{\lambda}}(u^{-1})$.

2 ♥ ☆☆☆ Translation/dilatation du spectre.

Soient E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Exprimer $\text{Sp}(\alpha u)$ et $\text{Sp}(u + \alpha \text{Id}_E)$ en fonction de $\text{Sp } u$.

Si $\alpha = 0$, $\text{Sp}(\alpha u) = \text{Sp } 0 = \{0\}$.
Si $\alpha \neq 0$,

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp } u &\Leftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0\}, u(x) = \lambda x \\ &\Leftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0\}, (\alpha u)(x) = \alpha \lambda x \\ &\Leftrightarrow \alpha \lambda \in \text{Sp}(\alpha u). \end{aligned}$$

Dans les deux cas, $\text{Sp}(\alpha u) = \{\alpha \lambda, \lambda \in \text{Sp } u\} = \alpha \text{Sp } u$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp } u &\Leftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0\}, u(x) = \lambda x \\ &\Leftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0\}, (u + \alpha \text{Id}_E)(x) = (\lambda + \alpha)x \\ &\Leftrightarrow \lambda + \alpha \in \text{Sp}(u + \alpha \text{Id}_E). \end{aligned}$$

On en déduit $\text{Sp}(u + \alpha \text{Id}_E) = \{\lambda + \alpha, \lambda \in \text{Sp } u\}$.

3 ♥ ☆☆☆ Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

1. Si A et B sont diagonalisables, $A + B$ l'est également.
2. Si A et B sont trigonalisables, $A + B$ l'est également.

3. $0 \in \text{Sp } A \Leftrightarrow 0 \in \text{Sp}(A^2)$.

4. $\text{Sp } A^2 = \{\lambda^2, \lambda \in \text{Sp } A\}$.

1. Faux. Par exemple :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Vrai dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (car toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont trigonalisables, mais faux en général :

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Vrai. On a $0 \in \text{Sp}(M)$ si et seulement si M n'est pas inversible. Or $\det(A^2) = \det(A)^2$, donc A est inversible si et seulement si A^2 l'est.

4. Faux. On a $\{\lambda^2, \lambda \in \text{Sp } A\} \subset \text{Sp } A^2$, mais l'autre inclusion est fautive si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: par exemple, si

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

alors $A^2 = -I_2$, donc $\text{Sp}(A^2) = \{-1\}$, mais $\text{Sp } A = \emptyset$.

En revanche, on voit en trigonalisant A que l'assertion est vraie si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

4 ★☆☆ Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et $\mathbb{Z}$ tels que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = p.$$

1. Montrer que $p \in \text{Sp}(A)$.
2. Montrer que p divise $\det A$.

1. La condition sur A entraîne que $(1 \dots 1)^T$ est vecteur propre de A , associé à la valeur propre p , donc $p \in \text{Sp}(A)$.

2. D'après la question précédente, on a $\chi_A(p) = 0$. En notant $\chi_A = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k$, on a

$$(-1)^n \det A = a_0 = - \sum_{k=1}^n \alpha_k p^k.$$

Or d'après la définition du déterminant, les α_k sont dans $\mathbb{Z}$ car les coefficients de A le sont. Ainsi, on a bien $p \mid \det A$.

On peut aussi écrire directement le déterminant de A , et effectuer l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + \dots + C_n$ qui ne change pas le déterminant. Une factorisation conclut.

5 ♥ ☆☆☆ Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que u et v commutent. Montrer que u et v ont au moins un vecteur propre commun.

Comme on travaille sur $\mathbb{C}$, u admet au moins une valeur propre λ , on note $E_\lambda(u)$ le sous-espace propre associé. Comme u et v commutent, $E_\lambda(u)$ est stable par v , et on peut considérer l'endomorphisme v_λ induit par v sur $E_\lambda(u)$.

À nouveau, comme on travaille sur $\mathbb{C}$, v_λ a au moins une valeur propre, donc possède un vecteur propre x , qui est donc aussi vecteur propre de v . On a par ailleurs $x \in E_\lambda(u)$, donc x est vecteur propre de u et de v .

6 ★★☆☆ Soient $n \in \mathbb{N}$ un entier impair et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{U}$ et $\det A = 1$. Montrer que 1 est valeur propre de A .

On sait que si $\lambda \in \text{Sp}(A)$, alors $\bar{\lambda} \in \text{Sp}(A)$ avec même multiplicité, car A est à coefficients dans $\mathbb{R}$. Ainsi, les valeurs propres de A dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ comptées avec leur multiplicité sont en nombre pair.

Comme n est impair, on déduit de ce qui précède qu'il y a un nombre impair de valeurs propres réelles (donc dans $\{-1, 1\}$) comptées avec leur multiplicité. Si $1 \notin \text{Sp}(A)$, alors -1 est la seule valeur propre réelle, et on note α sa multiplicité, qui est donc impaire.

En regroupant les complexes avec leurs conjugués, on obtient $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(A) \cap \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} \lambda = 1$, donc

$$\det A = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A) \cap \mathbb{R}} \lambda = (-1)^\alpha = -1,$$

et il y a contradiction.

7 ★★☆☆ *Dimension infinie.*

Soient $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'espace des suites complexes et $T \in \mathcal{L}(E)$ défini par

$$\forall u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, T(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

- Déterminer les valeurs propres de T et les sous-espaces propres associés.
- Même question en changeant E en l'espace ℓ^∞ des suites complexes bornées. Représenter $\text{Sp}(T)$ dans le plan complexe.

8 ★★☆☆ On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

- Pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, calculer $D_n(\theta) = \det(A + 2 \cos \theta I_n)$.
- En déduire les valeurs propres de A .

9 ★★☆☆ *Matrices stochastiques.*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, m_{ij} \geq 0, \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n m_{ij} = 1.$$

- Montrer que 1 est valeur propre de M .
- Montrer que pour tout $\lambda \in \text{Sp}(M)$, $|\lambda| \leq 1$.

10 ★★☆☆ *Disques de Gershgorin.*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- Montrer que $\text{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n D_i$, où pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$D_i = \left\{ z \in \mathbb{C}, |z - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\},$$

puis $\text{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n \tilde{D}_i$, où pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\tilde{D}_i = \left\{ z \in \mathbb{C}, |z - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ji}| \right\}.$$

- On dit que A est à diagonale strictement dominante si

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

Montrer que si A est à diagonale strictement dominante, alors A est inversible.

11 ♥ ★☆☆ *Matrice compagnon.*

Soit P un polynôme unitaire de $\mathbb{K}_n[X]$, noté :

$$P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$$

On pose

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Montrer qu'alors $\chi_A = P$. On dit que A est la *matrice compagnon* du polynôme P .

Indication. Raisonner par récurrence sur n . Développer par rapport à la première ligne.

Montrons le résultat par récurrence sur n .

- Si $n = 1$, alors la matrice A est réduite au scalaire $-a_0$, donc on a $\chi_A = X + a_0 = P$, ce qui conclut.
- Soit $n \geq 2$. On suppose que le résultat est vrai au rang $n - 1$. Si $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ et A est la matrice de l'énoncé, on obtient en développant

par rapport à la première ligne :

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{vmatrix} X & & & a_0 \\ -1 & \ddots & & a_1 \\ & \ddots & X & \vdots \\ & & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= X \begin{vmatrix} X & & & a_1 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & X & \vdots \\ & & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{n+1} a_0 \begin{vmatrix} -1 & X & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & X \\ & & & -1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Ce dernier déterminant vaut $(-1)^{n+1} a_0 (-1)^{n-1} = a_0$. En utilisant l'hypothèse de récurrence pour le premier, on obtient

$$\begin{aligned} \chi_A &= X(X^{n-1} + a_{n-1}X^{n-2} + \dots + a_2X + a_1) + a_0 \\ &= X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0, \end{aligned}$$

ce qui conclut.

Diagonalisation

12 ♡ ★☆☆ Diagonaliser les matrices suivantes, en suivant la démarche la plus efficace.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & j & j^2 \\ j^2 & 1 & j \\ j & j^2 & 1 \end{bmatrix}.$$

A : $x_1 = (1 \dots 1)^T$ est vecteur propre de A , associé à la valeur propre n . Par ailleurs, $\text{rg } A = 1$, donc par le théorème du rang, $\dim E_0(A) = \dim \text{Ker } A = n - 1$. Ainsi, comme

$$\dim E_0(A) = n - 1, \quad \text{et} \quad \dim E_n(A) \geq 1,$$

on a $\dim E_n(A) = 1$, et comme $n = \dim E_0(A) + \dim E_n(A)$, la matrice est diagonalisable. Par ailleurs,

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad x_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sont dans le noyau de A , donc vecteurs propres associés à la valeur propre 0. Ils forment clairement une famille libre. On

en déduit que $A = PDP^{-1}$, en choisissant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et $D = \text{diag}(n, 0, \dots, 0)$.

B : Comme A est de rang 1, on a $\text{Ker } A = n - 1$, et on remarque

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad x_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_B = \begin{vmatrix} X-2 & 0 & 1 \\ 2 & X-1 & 2 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1) \begin{vmatrix} X-2 & 0 \\ 2 & X-1 \end{vmatrix}$$

donc $\chi_B = (X-1)^2(X-2)$, et $\text{Sp}(B) = \{1, 2\}$.

N.B. : on peut aussi remarquer à l'œil que $B - I_3$ est de rang 1, donc $\dim \text{Ker}(B - I) = 2$, et $m(1) \geq 2$. On trouve la troisième valeur propre à l'aide de la trace.

On a

$$\text{Ker}(B - I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Par ailleurs,

$$\text{Ker}(B - 2I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\dim E_1(B) + \dim E_2(B) = 3$, donc B est diagonalisable : $B = PDP^{-1}$, où

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

C : On remarque que C est de rang 1, donc $\dim \text{Ker}(C) = 2$, et 0 est valeur propre avec $m(0) \geq 2$. On trouve la troisième valeur propre λ à l'aide de la trace :

$$0 + 0 + \lambda = \text{tr } C = 3$$

donc $\lambda = 3$.

On remarque (ou on résout un système pour obtenir) :

$$\text{Ker}(C) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} j \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ j \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Par ailleurs,

$$\text{Ker}(C - 3I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & j & j^2 \\ j^2 & -2 & j \\ j & j^2 & -2 \end{pmatrix} = \text{Vect} \begin{pmatrix} j^2 \\ j \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\dim E_0(C) + \dim E_3(C) = 3$, donc C est diagonalisable : $C = PDP^{-1}$, où

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} j & 0 & j^2 \\ -1 & j & j \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

13 ★☆☆ *Matrice à paramètre.*

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Déterminer les valeurs propres de A .
- Déterminer les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ telles que A soit diagonalisable.

1. On détermine le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & -a & -1 \\ -a & X & -1 \\ -a & -1 & X \end{vmatrix} = (X - a - 1) \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ 1 & X & -1 \\ 1 & -1 & X \end{vmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \chi_A &= (X - a - 1) \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ 0 & X + a & 0 \\ 0 & a - 1 & X + 1 \end{vmatrix} \\ &= (X - (a + 1))(X - a)(X + 1), \end{aligned}$$

et les valeurs propres sont $a + 1$, -1 et $-a$, éventuellement confondues.

- Si $a \notin \{-2, -\frac{1}{2}, 1\}$, alors A a trois valeurs propres distinctes, donc A est diagonalisable.
 - Si $a = 1$, la valeur propre -1 est double, l'autre (2) est simple. Comme $\text{rg}(A + I_3) = 1$, on a $\dim E_{-1}(A) = 2$, et A est diagonalisable.
 - Si $a = -2$, la valeur propre -1 est double, l'autre (2) est simple. Comme $\text{rg}(A + I_3) = 2$, on a $\dim E_{-1}(A) = 1$, et A n'est pas diagonalisable.
 - Si $a = -\frac{1}{2}$, la valeur propre $\frac{1}{2}$ est double, l'autre (-1) est simple. Comme $\text{rg}(A - \frac{1}{2}I_3) = 1$, on a $\dim E_{\frac{1}{2}}(A) = 1$, et A n'est pas diagonalisable.

14 ★☆☆ *Matrice à paramètre.*

Étudier, en fonction des paramètres $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{K}$, la diagonalisabilité de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 2 & 0 \\ d & e & f & 2 \end{bmatrix}$$

15 ♥ ★☆☆ Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 est diagonalisable si et seulement si $\text{tr } A \neq 0$.

Par le théorème du rang, on a $\dim \text{Ker } A = n - 1$, donc $\dim E_0(A) = n - 1$.

- Si $\text{tr } A \neq 0$: en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A comptées avec multiplicité, on sait que

$$\text{tr } A = \lambda_1 + \dots + \lambda_n.$$

Ainsi, A possède une valeur propre $\lambda \neq 0$. On a $\dim E_\lambda(A) \geq 1$, mais aussi $\dim E_\lambda(A) \leq 1$ la multiplicité de λ est au plus 1. Finalement, $\dim E_\lambda(A) = 1$,

et A est diagonalisable.

- Si $\text{tr } A = 0$, alors par ce qui précède, 0 est la seule valeur propre de A , et comme $\dim E_0(A) \neq n$, A n'est pas diagonalisable.

16 ♥ ★☆☆ L'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ défini par

$$\begin{aligned} u : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A &\mapsto A + \text{tr}(A)I_n \end{aligned}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, est-il diagonalisable ?

Soient λ valeur propre de u et A un vecteur propre associé. Alors $A + \text{tr}(A)I_n = \lambda A$, donc $(1 - \lambda)A = -\text{tr}(A)I_n$.

- Cas $\lambda = 1$: on a $u(A) = A$ ssi $\text{tr}(A) = 0$. Ainsi, 1 est valeur propre et son sous-espace propre est $\{A, \text{tr}(A) = 0\}$, dont la dimension est $n^2 - 1$ (c'est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).
- Si $\lambda \neq 1$, alors $A \in \text{Vect}(I_n)$. Or $u(I_n) = (n + 1)I_n$. Ainsi, la seule valeur propre distincte de 1 est $n + 1$, et son sous-espace propre est de dimension 1.

Ainsi, u est diagonalisable.

17 ♥ ★☆☆ Soient $a, b \in \mathbb{K}$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & b & a & \dots \\ b & a & b & \dots \\ a & b & a & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K}).$$

- Selon les valeurs de a et b , déterminer le rang de A .
- Montrer que A est diagonalisable.

- $\text{rg } A = 0$ si $a = b = 0$. Si $(a, b) \neq (0, 0)$, alors $\text{rg } A = 2$ si $a \notin \{-b, b\}$, et $\text{rg } A = 1$ sinon.

- Si $a = b = 0$, A est nulle donc diagonale. On suppose maintenant $(a, b) \neq (0, 0)$.

Si $a \in \{b, -b\}$, alors $\text{rg } A = 1$ donc $\dim E_0(A) = n - 1$. Il reste une valeur propre, qui vaut $\lambda = 2na$ d'après la trace. Elle est non nulle car si $a = 0$, $b = 0$ également, ce qui n'est pas possible.

On a alors $E = E_0(A) \oplus E_\lambda(A)$, ce qui conclut.

Si $a \notin \{-b, b\}$, alors $\text{rg } A = 2$, donc $\dim E_0(A) = 2n - 2$. Par ailleurs, $e_1 = (1 \dots 1)^T$ est vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda = n(a + b)$. On trouve la dernière valeur propre par exemple à l'aide de la trace de A :

$$\mu = \text{tr}(A) - \lambda = 2na - n(a + b) = n(a - b).$$

Le vecteur $e_2 = (1 \ -1 \ \dots \ 1 \ -1)^T$ est un vecteur propre associé à μ . On note que comme $a \notin \{-b, b\}$, λ et μ sont non nulles.

La famille libre (e_1, e_2) , concaténée à une base de $\text{Ker } A$ est donc libre de bon cardinal, c'est une base de E faite de vecteurs propres de A .

*N.B. : cette rédaction évite de traiter le cas où $\lambda = \mu$.
On peut aussi distinguer les cas.*

18 ★★☆☆ Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ distincts tels que

$$(u - \lambda \text{Id}_E) \circ (u - \mu \text{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Montrer que u est diagonalisable.

19 ★★☆☆ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que χ_A est scindé à racines simples. Montrer qu'il existe un nombre fini de matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$M^3 - 3M = A.$$

Indication. Remarquer que si M est solution, alors M et A commutent.

20 ★★☆☆ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable et

$$M = \begin{bmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C}).$$

1. Exprimer les valeurs propres de M en fonction des valeurs propres de A .
2. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A est inversible.

21 ★★☆☆ Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Si u est diagonalisable, a-t-on $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$?
2. Si $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$, a-t-on u diagonalisable?

1. Oui. Si u est diagonalisable, on peut écrire

$$E = E_0 \oplus E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont les valeurs propres non nulles de u . On pose $F = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}$, et on montre que $F = \text{Im } u$.

- Si $x \in F$, alors on peut écrire $x = x_1 + \dots + x_k$ où $x_i \in E_{\lambda_i}$ pour tout i . Ainsi,

$$x = \frac{1}{\lambda_1} u(x_1) + \dots + \frac{1}{\lambda_k} u(x_k) \in \text{Im } u.$$

- Si $x \in \text{Im } u$, alors $x = u(x_0 + \dots + x_k)$, où $x_i \in E_{\lambda_i}$ pour tout i , donc

$$\begin{aligned} x &= u(x_1) + \dots + u(x_k) \\ &= \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k \in F. \end{aligned}$$

Finalement, $E = E_0 \oplus F = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$.

2. Non. Par exemple, si $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

alors $\text{Ker } u = \{0\}$ et $\text{Im } u = \mathbb{R}^2$, donc $\mathbb{R}^2 = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$, mais u n'est pas diagonalisable.

22 ♥ ★★☆☆ *Diagonalisation simultanée.*

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f \circ g = g \circ f$, et f admet n valeurs propres distinctes.

1. a. Montrer que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g .
b. En déduire que f et g sont diagonalisables dans une même base de E .
2. *Application.* On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Déterminer le nombre de solutions $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de l'équation

$$2M^2 + 5M = 3A.$$

- 1a. Comme f et g commutent, les sous-espaces propres de f sont stables par g . Par ailleurs, comme f a n valeurs propres distinctes, les sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

Si $\lambda \in \text{Sp}(f)$ et $x \in E_\lambda(f)$, alors $g(x) \in E_\lambda(f)$. Comme $\dim E_\lambda(f) = 1$, $g(x)$ et x sont colinéaires, et x est un vecteur propre de g .

- 1b. Comme f a n valeurs propres distinctes, on sait que f est diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une base de vecteurs propres de f . D'après la question précédente, cette base est également une base de vecteurs propres de g , ce qui conclut.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une solution. Alors, A commute avec M car A est un polynôme en M . Or les valeurs propres de A sont 0, 1, 2, donc d'après la question 1, il existe $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad \text{et} \quad M = P D_M P^{-1},$$

où D_M est diagonale. On note alors $D = \text{diag}(0, 1, 2)$ et $D_M = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} 2M^2 + 5M = 3A &\Leftrightarrow P(D_M^2 + 5D_M)P^{-1} = PDP^{-1} \\ &\Leftrightarrow D_M^2 + 5D_M = D \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\mu_1^2 + 5\mu_1 = 0, \\ 2\mu_2^2 + 5\mu_2 = 3, \\ 2\mu_3^2 + 5\mu_3 = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

Chacune des trois équations possède deux solutions réelles distinctes, notées respectivement $\mu_1^+, \mu_1^-, \mu_2^+, \mu_2^-, \mu_3^+, \mu_3^-$. Ainsi, les solutions sont les matrices :

$$M = P \begin{pmatrix} \mu_1^\pm & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2^\pm & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3^\pm \end{pmatrix}.$$

Au total $2 \times 2 \times 2 = 8$ solutions.