

02. Déterminants

1 ♡ ★☆☆ Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Calculer les déterminants suivants, en donnant une forme factorisée du résultat.

$$\begin{array}{ll}
 1. \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} & 2. \begin{vmatrix} c & a & b & c \\ a & c & c & b \\ b & c & c & a \\ c & b & a & c \end{vmatrix} \\
 3. \begin{vmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{vmatrix} & \\
 4. \det \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})} & 5. \det \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}
 \end{array}$$

2 ♡ ★☆☆ *Déterminant de Vandermonde.*
Pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, on note :

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que

$$V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

2. Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ où les x_i sont deux à deux distincts. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(x_i) = y_i.$$

3 ★☆☆ Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note

$$M_n = \begin{pmatrix} \cos \theta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 \cos \theta & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \cos \theta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

et $\Delta_n = \det M_n$.

1. Déterminer Δ_1, Δ_2 .

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\Delta_{n+2} = 2 \cos \theta \Delta_{n+1} - \Delta_n.$$

3. En déduire Δ_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4 ★☆☆ Soient un entier $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(A + M) = \det A + \det M.$$

1. Montrer que $\det A = 0$.

2. Montrer que $A = 0$.

On pourra avoir recours aux matrices J_r .

5 ♡ ★★☆☆ Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que u et v commutent et v est nilpotent. Montrer que

$$\det(u + v) = \det(u).$$

On pourra considérer les restrictions de u et v à $\text{Im } v$, et raisonner par récurrence.

5/2 : proposer une autre preuve.

6 ★★☆☆ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $r = \text{rg } A$. Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \det(xA + B)$$

est polynomiale de degré au plus r .

7 ♡ ★☆☆ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que :

$$1. \det \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \det(A + B) \det(A - B).$$

$$2. \det \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix} = \det(A + iB) \det(A - iB).$$

8 ★★☆☆ Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $CD = DC$.

1. On suppose que D est inversible. Montrer que

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - BC).$$

2. ★★☆☆ Montrer que le résultat tient toujours si D n'est pas inversible.

On pourra introduire la fonction $t \mapsto \det(D + tI_n)$.