

02. Déterminants

1 ♡ ★☆☆ Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Calculer les déterminants suivants, en donnant une forme factorisée du résultat.

$$1. \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} \quad 2. \begin{vmatrix} c & a & b & c \\ a & c & c & b \\ b & c & c & a \\ c & b & a & c \end{vmatrix} \quad 3. \begin{vmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{vmatrix}$$

$$4. \det \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \quad 5. \det \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

1. $2abc$.
2. $(b-a)^2(a+b+2c)(a+b-2c)$.
3. $(c-a)(d-b)(d-c+b-a)$.
4. $n+1$.
5. $(-1)^{\frac{n}{2}}(a+n-1)(a-1)^{n-1}$ si n est pair.
 $(-1)^{\frac{n-1}{2}}(a+n-1)(a-1)^{n-1}$ si n est impair.

2 ♡ ★☆☆ Déterminant de Vandermonde.

Pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, on note :

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que

$$V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

2. Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ où les x_i sont deux à deux distincts. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(x_i) = y_i.$$

3 ★☆☆ Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note

$$M_n = \begin{pmatrix} \cos \theta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 \cos \theta & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \cos \theta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

et $\Delta_n = \det M_n$.

1. Déterminer Δ_1, Δ_2 .

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\Delta_{n+2} = 2 \cos \theta \Delta_{n+1} - \Delta_n.$$

3. En déduire Δ_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\Delta_1 = \cos \theta, \Delta_2 = \cos(2\theta)$.
2. Développement par rapport à la dernière ligne, puis par rapport à la dernière colonne dans la deuxième matrice obtenue.
3. L'équation caractéristique est $r^2 - 2 \cos \theta r + 1 = 0$.
 - Cas $\theta \neq 0 [\pi]$: les deux racines sont $e^{\pm i\theta}$. Donc les solutions sont de la forme $\alpha e^{in\theta} + \beta e^{-in\theta}$. Les cas $n = 1, 2$ donnent un système de matrice de déterminant $-2i \sin \theta \neq 0$, qui a pour solution $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.
 - Cas $\theta = 0, \theta = \pi$: on trouve respectivement 1 et $(-1)^n$.

Dans tous les cas, $\Delta_n = \cos(n\theta)$.

On peut aussi voir directement que $(\cos(n\theta))$ vérifie la récurrence.

4 ★★☆☆ Soient un entier $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(A + M) = \det A + \det M.$$

1. Montrer que $\det A = 0$.

2. Montrer que $A = 0$.

On pourra avoir recours aux matrices J_r .

1. En choisissant $M = A$, on obtient

$$\det(2A) = 2 \det(A),$$

mais on a aussi $\det(2A) = 2^n \det A$. Ainsi, si $\det A \neq 0$, alors $2^n = 2$, ce qui est impossible car $n \geq 2$.

2. Si $r = \text{rg } A$, on sait que A est équivalente à la matrice J_r . On peut donc écrire $A = Q J_r P$, où $Q, P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. En choisissant $M = QP$, on a alors

$$\begin{aligned} \det(A + M) &= \det(Q(J_r + I_n)P) \\ &= \det Q \det P \det(J_r + I_n) \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\det M = \det(A + M) = 2^r \det Q \det P.$$

On en déduit $\det P \det Q = 2^r \det Q \det P$. Comme $\det P$ et $\det Q$ sont non nuls, ceci entraîne $2^r = 1$, donc $r = 0$. Comme $\text{rg } A = 0$, on a $A = 0$.

5 ♡ ★★☆☆ Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que u et v commutent

et v est nilpotent. Montrer que

$$\det(u + v) = \det(u).$$

On pourra considérer les restrictions de u et v à $\text{Im } v$, et raisonner par récurrence.

5/2 : proposer une autre preuve.

Si $\dim E = 1$, on a $v = 0_{\mathcal{L}(E)}$, donc le résultat est clair.

On raisonne par récurrence forte sur la dimension, et on suppose que le résultat est vrai lorsque $\dim E < n$. Comme u et v commutent, $\text{Im } v$ est stable par u et v . On complète une base de $\text{Im } v$ en une base de E qu'on note $\mathcal{B}$. Ainsi, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $N = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ sont triangulaires par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \star \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} N_1 & \star \\ 0 & N_2 \end{pmatrix}.$$

Soit p l'indice de nilpotence de v . On a $N_1^p = 0$ et $N_2^p = 0$, donc N_1 et N_2 sont nilpotentes. Comme $AN = NA$, on a $A_1 N_1 = N_1 A_1$ et $A_2 N_2 = N_2 A_2$.

Comme $\text{Im } v \neq E$, si $v \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$, l'hypothèse de récurrence permet de conclure :

$$\det(A + N) = \det(A_1 + N_1) \det(A_2 + N_2) = \det A_1 \det A_2.$$

Si $v = 0_{\mathcal{L}(E)}$, on a vu que le résultat est clair.

6 ★☆☆ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $r = \text{rg } A$. Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \det(xA + B)$$

est polynomiale de degré au plus r .

Il existe $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PJ_rQ$. Ainsi, en notant $\tilde{B} = P^{-1}BQ^{-1}$, on a :

$$f(x) = \det(P) \det(xJ_r + \tilde{B}) \det(Q).$$

Il s'agit donc de montrer que $x \mapsto \det(xJ_r + \tilde{B})$ est polynomiale de degré au plus r . Pour le remarquer, il suffit d'écrire $\tilde{B}$ par blocs :

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

où $B_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$. On a alors

$$\det(xJ_r + \tilde{B}) = \begin{vmatrix} xI_r + B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{vmatrix}$$

et on conclut à l'aide de la définition du déterminant : $\det(xJ_r + \tilde{B})$ est une somme de produits de n termes où apparaît au plus r fois x .

7 ♥ ★☆☆ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que :

$$1. \det \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \det(A + B) \det(A - B).$$

$$2. \det \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix} = \det(A + iB) \det(A - iB).$$

1. On a

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} A+B & 0 \\ B & A-B \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ce qui conclut car cette dernière matrice est triangulaire par blocs.

2. On a

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} A-iB & B+iA \\ -B & A \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} A-iB & 0 \\ -B & A+iB \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

où on a fait l'opération $C_2 \leftarrow C_2 - iC_1$. On conclut par déterminant triangulaire.

8 ★☆☆ Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $CD = DC$.

1. On suppose que D est inversible. Montrer que

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - BC).$$

2. ★★☆☆ Montrer que le résultat tient toujours si D n'est pas inversible.

On pourra introduire la fonction $t \mapsto \det(D + tI_n)$.