

1. Algèbre linéaire

Matrices

1 ★☆☆ Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec D .

2 ♥ ★☆☆ Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente. Montrer que la matrice $I_n - N$ est inversible et déterminer son inverse.

3 ★☆☆ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$, et

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & A \end{array} \right].$$

Déterminer M^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

4 ♥ ★☆☆ Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et

$$M = \left[\begin{array}{c|c|c} I_n & A & B \\ \hline 0 & I_n & C \\ \hline 0 & 0 & I_n \end{array} \right].$$

Justifier que M est inversible et déterminer son inverse.

5 ♥ ★★☆☆ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array} \right].$$

- Déterminer le rang de M .
- Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible, et exprimer M^{-1} lorsqu'elle existe.

6 ★★☆☆ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$M + M^T = \text{tr}(M) A.$$

7 ★★☆☆ *Matrices stochastiques.*

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si ses coefficients sont dans $\mathbb{R}_+$ et la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1 :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1.$$

- Montrer que le produit de deux matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique.
- Déterminer toutes les matrices stochastiques inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont l'inverse est stochastique.

8 ★★☆☆ *Matrices à diagonale strictement dominante.*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à diagonale strictement dominante, c'est-

à-dire : telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

On pourra montrer que $\text{Ker } A = \{0\}$.

9 ★★☆☆ On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est magique si les sommes des coefficients de chaque ligne et les sommes des coefficients de chaque colonne sont les mêmes.

- Montrer que l'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices magiques est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et φ_M l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M . On pose

$$F = \text{Vect}((1, \dots, 1)),$$

$$G = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\}.$$

a. Montrer que

$$M \in \mathcal{M} \Leftrightarrow F \text{ et } G \text{ sont stables par } \varphi_M.$$

b. En déduire $\dim \mathcal{M}$.

Espaces vectoriels

10 ♥ ★☆☆ Montrer que $(X^k(1-X)^{n-k})_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

11 ♥ ☆☆☆ *Polynômes interpolateurs de Lagrange.*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. On note $L_1, \dots, L_n$ les polynômes interpolateurs de Lagrange associés à $\alpha_1, \dots, \alpha_n$: pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $L_i \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad L_i(\alpha_j) = \delta_{i,j}.$$

Montrer que la famille $(L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

12 ♥ ★☆☆ Montrer que les familles de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$(x \mapsto \cos(kx))_{k \in \mathbb{N}}, \quad (x \mapsto e^{kx})_{k \in \mathbb{N}}$$

sont libres.

13 ♥ ★☆☆ Soient E un espace vectoriel et F, G des sous-espaces vectoriels de E . Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

14 ♥ ★☆☆ On note $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. On considère

$$F = \left\{ f \in E, \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\},$$

$$G = \{ f \in E, f \text{ est constante} \}.$$

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

15 ♥ ★☆☆ Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul. On considère

$$F = \{ P \in \mathbb{K}[X], A \mid P \}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{K}[X]$.

16 ★☆☆ On note $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, et on considère

$$H = \left\{ f \in E, \int_0^1 f(t) dt = \frac{f(0) + f(1)}{2} \right\}.$$

1. Montrer que H est un hyperplan de E .
2. Déterminer un supplémentaire de H dans E .

17 ★☆☆ Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ des réels deux à deux distincts. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose

$$\varphi_k : P \mapsto P(\alpha_k)$$

1. Montrer que $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]^*$.
2. En déduire qu'il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\int_0^1 P(t) dt = \sum_{k=0}^n \lambda_k P(\alpha_k).$$

18 ★☆☆ Dans les deux cas suivants, montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer un supplémentaire de F dans E .

1. $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et

$$F = \{ f \in E, f(0) = 0 \}.$$

2. $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et

$$F = \{ f \in E, f(0) = 0, f'(0) = 0 \}.$$

Applications linéaires

19 ♥ ★☆☆ *Diagonalisation.*

Soient $E = \mathbb{R}^3$ et l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$u(x, y, z) = (4x + y - z, 2x + 3y - z, 2x + y + z).$$

1. Donner la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer deux réels distincts λ et μ tels que $u - \lambda \text{Id}_E$ et $u - \mu \text{Id}_E$ ne soient pas inversibles.
3. Montrer que $E = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(u - \mu \text{Id}_E)$.

4. Écrire la matrice de u dans une base adaptée à la décomposition ci-dessus.

20 ♥ ★☆☆ *Matrice de Vandermonde.*

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ distincts. On considère

$$V = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

En considérant l'application $\Phi : \mathbb{K}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{K}^n$ définie par

$$\Phi : P \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_n)),$$

montrer que V est inversible.

21 ♥ ★☆☆ Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et f un endomorphisme de E .

1. Montrer que

$$E = \text{Ker } f + \text{Im } f \Leftrightarrow \text{Im } f^2 = \text{Im } f.$$

2. Montrer que

$$\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_E\} \Leftrightarrow \text{Ker } f^2 = \text{Ker } f.$$

et donner une condition nécessaire et suffisante sur $f \in \mathcal{L}(E)$ pour que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.

22 ★☆☆ Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par :

$$\varphi : A \mapsto AD - DA$$

23 ♥ ★☆☆ Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que l'endomorphisme f non nul, et nilpotent : il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}, \quad \text{et} \quad f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.

2. On suppose que E est de dimension finie n , et que :

$$\forall x \in E, \exists p \in \mathbb{N}, f^p(x) = 0_E.$$

Montrer que f est nilpotente.

3. Si E est de dimension infinie, le résultat de la question précédente est-il toujours vrai ?

24 ★☆☆ Soient f_1, f_2, f_3 les fonctions de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définies par

$$f_1 : x \mapsto e^{2x}, \quad f_2 : x \mapsto xe^{2x}, \quad f_3 : x \mapsto x^2e^{2x}$$

et $E = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E .
2. Montrer que $\Phi : f \mapsto f'$ définit un endomorphisme sur E et déterminer sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. Justifier que Φ est un automorphisme.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Soit $f \in E$ définie par $f : x \mapsto (4x^2 - 1)e^{2x}$. Expliciter $f^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

25 ♥ ★★☆☆ Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ une matrice non nulle telle que $A^2 = 0$. Montrer que A est semblable à

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

26 ★★☆☆ Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall x \in E, (x, f(x)) \text{ est une famille liée.}$$

Montrer que f est une homothétie.

27 ★★☆☆ *Matrices de trace nulle.*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n .

1. Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$ est telle que $\text{tr } u = 0$, alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est à diagonale nulle.

On pourra utiliser l'exercice 26.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\text{tr } M = 0$ si et seulement s'il existe $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $M = AB - BA$.

Projecteurs et symétries

28 ♥ ★☆☆☆ On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (4x - 6y, 2x - 3y) \end{aligned}$$

Montrer que f est un projecteur de $\mathbb{R}^2$ et préciser ses éléments caractéristiques.

29 ♥ ★☆☆☆ On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}[X] &\rightarrow \mathbb{K}[X] \\ P &\mapsto P - 2P'(0)X \end{aligned}$$

Montrer que f est une symétrie de $\mathbb{K}[X]$ et préciser ses éléments caractéristiques.

30 ♥ ★☆☆☆ On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soient

$$\begin{aligned} P &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - z = 0\} \\ D &= \text{Vect}((1, 0, -1)). \end{aligned}$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

2. On note :

p le projecteur sur P parallèlement à D ,

q le projecteur sur D parallèlement à P ,

s la symétrie par rapport à P parallèlement à D .

Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$.

31 ★★☆☆ Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et p, q deux projecteurs sur E .

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

2. On suppose que $p + q$ est un projecteur.

a. Montrer que $\text{Im}(p + q) = \text{Im } p + \text{Im } q$.

b. Montrer que $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$.