

1. Algèbre linéaire

Matrices

1 ★☆☆ Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec D .

2 ♥ ★☆☆ Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente. Montrer que la matrice $I_n - N$ est inversible et déterminer son inverse.

Par la formule de Bernoulli, on a

$$I_n - N^p = (I_n - N)M, \quad \text{où } M = \sum_{k=0}^{p-1} N^k.$$

Comme $N^p = 0_{n,n}$, on a $(I_n - N)M = I_n$, donc $I_n - N$ est inversible, d'inverse M .

3 ★☆☆ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$, et

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & A \end{array} \right].$$

Déterminer M^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On note que $M = D + N$, où

$$D = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad \text{et } N = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Or on a

$$DN = \begin{pmatrix} 0 & AB \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & BA \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = ND$$

Comme D et N commutent, on peut utiliser la formule du binôme. Du fait que $N^2 = 0$, on a :

$$\begin{aligned} M^k &= (D + N)^k \\ &= \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} D^{k-p} N^p \\ &= D^k + k D^{k-1} N \\ &= \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & A^k \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} A^{k-1} & 0 \\ 0 & A^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^k & k A^{k-1} B \\ 0 & A^k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On peut aussi bien sûr raisonner par récurrence.

4 ♥ ★☆☆ Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et

$$M = \left[\begin{array}{c|c|c} I_n & A & B \\ \hline 0 & I_n & C \\ \hline 0 & 0 & I_n \end{array} \right].$$

Justifier que M est inversible et déterminer son inverse.

Indication. Chercher la matrice inverse sous la bonne forme.

La matrice M est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls, donc M est inversible. De plus, M^{-1} est de la forme

$$M^{-1} = \left[\begin{array}{c|c|c} I_n & A' & B' \\ \hline 0 & I_n & C' \\ \hline 0 & 0 & I_n \end{array} \right].$$

On a

$$MM^{-1} = \left[\begin{array}{c|c|c} I_n & A' + A & B' + AC' + B \\ \hline 0 & I_n & C' + C \\ \hline 0 & 0 & I_n \end{array} \right].$$

Ainsi, $A' + A = 0$, $B' + AC' + B = 0$, et $C' + C = 0$, donc

$$M^{-1} = \left[\begin{array}{c|c|c} I_n & -A & AC - B \\ \hline 0 & I_n & -C \\ \hline 0 & 0 & I_n \end{array} \right].$$

Autre option : Gauss-Jordan par blocs en précisant les matrices de transvection par blocs.

5 ♥ ★★☆☆ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array} \right].$$

- Déterminer le rang de M .
- Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible, et exprimer M^{-1} lorsqu'elle existe.

- On a par opérations élémentaires par blocs sur les lignes, puis sur les colonnes :

$$\text{rg } M = \text{rg} \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & B - A \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B - A \end{pmatrix}$$

donc $\text{rg } M = \text{rg } A + \text{rg}(B - A)$.

En effet, $A \sim J_r$ et $B - A \sim J_{r'}$, où $r = \text{rg } A$ et $r' = \text{rg}(B - A)$, donc

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B - A \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} J_r & 0 \\ 0 & J_{r'} \end{pmatrix}$$

qui est de rang $r + r'$.

- D'après la question précédente, M est inversible si et seulement si A et $B - A$ le sont. On peut alors chercher M^{-1} par blocs sous la forme

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$$

et obtient $M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + (B - A)^{-1} & -(B - A)^{-1} \\ -(B - A)^{-1} & (B - A)^{-1} \end{pmatrix}$.

N.B. : on peut aussi raisonner par Gauss-Jordan, en justifiant bien les opérations par blocs, c'est-à-dire les matrices par lesquelles on multiplie.

6 ★★☆☆ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$M + M^T = \text{tr}(M) A.$$

On remarque d'abord que :

- toutes les matrices antisymétriques sont solutions de l'équation,
- si M est solution, $2\text{tr}(M) = \text{tr}(M)\text{tr}(A)$,
- si M est solution, $\text{tr}(M)A = \text{tr}(M)A^T$.

Distinguons les cas suivants.

- Si $\text{tr}(A) \neq 2$: alors toute solution M vérifie $\text{tr}(M) = 0$, donc $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
- Si $\text{tr}(A) = 2$ et $A \notin \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, alors $\text{tr}(M) = 0$, et $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
- Si $\text{tr}(A) = 2$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, alors toute solution M vérifie $M + M^T \in \text{Vect}(A)$.

Comme il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\frac{1}{2}(M + M^T) = \lambda A$, la décomposition de M selon $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ s'écrit

$$M = \lambda A + B$$

où $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Réciproquement, si $M = \lambda A + B$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, alors

$$M + M^T = 2\lambda A = \text{tr}(M) A$$

car $\text{tr}(M) = \lambda \text{tr}(A) = 2\lambda$.

Finalement :

- Si A est symétrique de trace 2, l'ensemble des solutions est $\{\lambda A + B, \lambda \in \mathbb{K}, B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})\}$.
- Sinon, l'ensemble des solutions est $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

7 ★★☆☆ *Matrices stochastiques.*

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si ses coefficients sont dans $\mathbb{R}_+$ et la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1 :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1.$$

1. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique.
2. Déterminer toutes les matrices stochastiques inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont l'inverse est stochastique.

8 ★★☆☆ *Matrices à diagonale strictement dominante.*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à diagonale strictement dominante, c'est-

à-dire : telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

On pourra montrer que $\text{Ker } A = \{0\}$.

Soit $X \in \text{Ker } A$ et supposons $X \neq 0$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = 0, \text{ donc } a_{i,i} x_i = - \sum_{j \neq i} a_{i,j} x_j.$$

Par inégalité triangulaire, on a alors pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$|a_{i,i}| |x_i| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| |x_j|.$$

En choisissant $i = i_0$, où $i_0 = \max\{|x_i|, i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$, on a

$$|a_{i_0,i_0}| |x_{i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}| |x_{i_0}|, \text{ donc } |a_{i_0,i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}|$$

car $x_{i_0} \neq 0$. Il y a donc contradiction.

9 ★★☆☆ On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est magique si les sommes des coefficients de chaque ligne et les sommes des coefficients de chaque colonne sont les mêmes.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices magiques est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et φ_M l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M . On pose

$$F = \text{Vect}((1, \dots, 1)),$$

$$G = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\}.$$

a. Montrer que

$$M \in \mathcal{M} \Leftrightarrow F \text{ et } G \text{ sont stables par } \varphi_M.$$

b. En déduire $\dim \mathcal{M}$.

Espaces vectoriels

10 ♥ ★☆☆☆ Montrer que $(X^k(1-X)^{n-k})_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Montrons que la famille est libre : supposons

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k X^k (1-X)^{n-k} = 0_{\mathbb{K}[X]}.$$

Si les coefficients $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ ne sont pas tous nuls, on note m le plus petit entier tel que $\lambda_m \neq 0$. On a alors

$$X^m (\lambda_m (1-X)^{n-m} + \dots + X^{n-m}) = 0_{\mathbb{K}[X]}.$$

Par intégrité de $\mathbb{K}[X]$, le polynôme $\lambda_m (1-X)^{n-m} + \dots + X^{n-m}$ est nul, et en évaluant en 0, on obtient $\lambda_m = 0$, ce qui est une contradiction.

Ainsi, la famille est libre et de bon cardinal, c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

11 ♥ ☆☆☆ Polynômes interpolateurs de Lagrange.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. On note $L_1, \dots, L_n$ les polynômes interpolateurs de Lagrange associés à $\alpha_1, \dots, \alpha_n$: pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $L_i \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, L_i(\alpha_j) = \delta_{ij}.$$

Montrer que la famille $(L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = 0_{\mathbb{K}[X]}$.

En évaluant en α_i , on obtient alors $\lambda_i = P(\alpha_i) = 0$. Ainsi, la famille est libre. Comme elle est aussi de bon cardinal, c'est bien une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

12 ♥ ★☆☆ Montrer que les familles de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$(x \mapsto e^{kx})_{k \in \mathbb{N}}, \quad (x \mapsto \cos(kx))_{k \in \mathbb{N}}$$

sont libres.

13 ♥ ★☆☆ Soient E un espace vectoriel et F, G des sous-espaces vectoriels de E . Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

14 ♥ ★☆☆ On note $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. On considère

$$F = \left\{ f \in E, \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\},$$

$$G = \{ f \in E, f \text{ est constante} \}.$$

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Indication. Montrer que toute fonction $f \in E$ peut s'écrire de manière unique comme somme d'une fonction de F et d'une fonction de G . Utiliser une analyse-synthèse si besoin.

15 ♥ ★★☆☆ Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul. On considère

$$F = \{ P \in \mathbb{K}[X], A \mid P \}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

2. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{K}[X]$.

1. On a $F = \{AQ, Q \in \mathbb{K}[X]\} = \text{Vect}(AX^k)_{k \in \mathbb{N}}$.

2. On note $d = \deg A$. Montrons $\mathbb{K}[X] = F \oplus \mathbb{K}_{d-1}[X]$:

– Si $P \in \mathbb{K}[X]$, la division euclidienne de P par A donne

$$P = AQ + R \in F + \mathbb{K}_{d-1}[X],$$

donc $\mathbb{K}[X] = F + \mathbb{K}_{d-1}[X]$.

– Si $P \in F \cap \mathbb{K}_{d-1}[X]$, alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = AQ$.

Ainsi, $\deg P = \deg A + \deg Q \leq d - 1$. Comme $\deg A = d$, on a $\deg Q = -\infty$, et $Q = 0$. On a donc $P = 0$, ce qui entraîne $F \cap \mathbb{K}_{d-1}[X] = \{0\}$.

16 ★☆☆ On note $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, et on considère

$$H = \left\{ f \in E, \int_0^1 f(t) dt = \frac{f(0) + f(1)}{2} \right\}.$$

1. Montrer que H est un hyperplan de E .

2. Déterminer un supplémentaire de H dans E .

1. Soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi : f \mapsto \int_0^1 f(t) dt - \frac{f(0) + f(1)}{2}.$$

Clairement, φ est une application linéaire et $H = \text{Ker } \varphi$. En notant $g : x \mapsto x^2$, on constate que $\varphi(g) \neq 0$, donc φ est non nulle. Ceci justifie que H est un hyperplan de E .

2. Nous avons vu que $g \notin H$. Comme H est un hyperplan, on sait que si D est une droite non contenue dans H , alors $E = H \oplus D$. Par conséquent, en posant $D = \text{Vect}(g)$, on a bien

$$E = H \oplus D.$$

17 ★☆☆ Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ des réels deux à deux distincts. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose

$$\varphi_k : P \mapsto P(\alpha_k)$$

1. Montrer que $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]^*$.

2. En déduire qu'il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\int_0^1 P(t) dt = \sum_{k=0}^n \lambda_k P(\alpha_k).$$

18 ★★☆☆ Dans les deux cas suivants, montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer un supplémentaire de F dans E .

1. $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et

$$F = \{ f \in E, f(0) = 0 \}.$$

2. $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et

$$F = \{f \in E, f(0) = 0, f'(0) = 0\}.$$

Applications linéaires

19 ♥ ★☆☆ *Diagonalisation.*

Soient $E = \mathbb{R}^3$ et l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$u(x, y, z) = (4x + y - z, 2x + 3y - z, 2x + y + z).$$

1. Donner la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer deux réels distincts λ et μ tels que $u - \lambda \text{Id}_E$ et $u - \mu \text{Id}_E$ ne soient pas inversibles.
3. Montrer que $E = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(u - \mu \text{Id}_E)$.
4. Écrire la matrice de u dans une base adaptée à la décomposition ci-dessus.

1. La matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\det(u - \lambda \text{Id}_E) = 0$, c'est-à-dire $\det(M - \lambda I_3) = 0$, or

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ 4-\lambda & 3-\lambda & -1 \\ 4-\lambda & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} \det(M - \lambda I_3) &= (4 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 - \lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (4 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (4 - \lambda)(2 - \lambda)^2. \end{aligned}$$

Ainsi, les réels $\lambda = 2$ et $\mu = 4$ conviennent.

3. On a $\text{rg}(M - 2I_3) = 1$ donc $\dim \text{Ker}(M - 2I_3) = 2$ par le théorème du rang. De même, $\text{rg}(M - 4I_3) = 2$ donc $\dim \text{Ker}(M - 4I_3) = 1$. Ceci donne

$$\dim E = \dim \text{Ker}(u - 2 \text{Id}_E) + \dim \text{Ker}(u - 4 \text{Id}_E).$$

De plus, on a $\text{Ker}(u - 2 \text{Id}_E) \cap \text{Ker}(u - 4 \text{Id}_E) = \{0_E\}$: si $x \in \text{Ker}(u - 2 \text{Id}_E) \cap \text{Ker}(u - 4 \text{Id}_E)$, alors $x = 0_E$ puisque $u(x) = 2x = 4x$.

Ainsi, $\text{Ker}(u - 2 \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(u - 4 \text{Id}_E)$ sont bien supplémentaires.

4. Si (e_1, e_2) est une base de $\text{Ker}(u - 2 \text{Id}_E)$ et e_3 un vecteur non nul de $\text{Ker}(u - 4 \text{Id}_E)$, alors la matrice de u dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

20 ♥ ★☆☆ *Matrice de Vandermonde.*

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ distincts. On considère

$$V = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

En considérant l'application $\Phi : \mathbb{K}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{K}^n$ définie par

$$\Phi : P \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_n)),$$

montrer que V est inversible.

21 ♥ ★☆☆ Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et f un endomorphisme de E .

1. Montrer que

$$E = \text{Ker } f + \text{Im } f \Leftrightarrow \text{Im } f^2 = \text{Im } f.$$

2. Montrer que

$$\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_E\} \Leftrightarrow \text{Ker } f^2 = \text{Ker } f.$$

et donner une condition nécessaire et suffisante sur $f \in \mathcal{L}(E)$ pour que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.

22 ★☆☆ Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par :

$$\varphi : A \mapsto AD - DA$$

– Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} (AD - DA)_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{i,k} d_{k,j} - \sum_{k=1}^n d_{i,k} a_{k,j} \\ &= (\lambda_j - \lambda_i) a_{i,j} \end{aligned}$$

Ainsi, $\varphi(A) = 0$ si et seulement si $(\lambda_j - \lambda_i) a_{i,j} = 0$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Comme $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, ceci se réécrit :

$$i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0.$$

Ainsi, $\text{Ker } \varphi$ est l'ensemble des matrices diagonales.

– On a

$$\begin{aligned} \text{Im } \varphi &= \text{Vect}(\varphi(E_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n} \\ &= \text{Vect}((\lambda_j - \lambda_i) E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \\ &= \text{Vect}(E_{ij})_{i \neq j} \end{aligned}$$

donc $\text{Im } \varphi$ est l'ensemble des matrices à diagonale nulle.

23 ♥ ★☆☆ Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que l'endomorphisme f non nul, et nilpotent : il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}, \quad \text{et} \quad f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.

2. On suppose que E est de dimension finie n , et que :

$$\forall x \in E, \exists p \in \mathbb{N}, f^p(x) = 0_E.$$

Montrer que f est nilpotente.

3. Si E est de dimension infinie, le résultat de la question précédente est-il toujours vrai ?

24 ★☆☆ Soient f_1, f_2, f_3 les fonctions de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définies par

$$f_1 : x \mapsto e^{2x}, \quad f_2 : x \mapsto xe^{2x}, \quad f_3 : x \mapsto x^2e^{2x}$$

et $E = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E .
2. Montrer que $\Phi : f \mapsto f'$ définit un endomorphisme sur E et déterminer sa matrice A dans la base $\mathcal{B}$. Justifier que Φ est un automorphisme.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Soit $f \in E$ définie par $f : x \mapsto (4x^2 - 1)e^{2x}$. Expliciter $f^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. On suppose $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$, et on évalue en 0, 1 et -1 .

$$2. \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{R}).$$

3. $A = 2I_3 + N$ avec $N^3 = 0$. On obtient

$$A^n = 2^{n-2} \begin{pmatrix} 4 & 2n & n(n-1) \\ 0 & 4 & 4n \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$4. f = -f_1 + 4f_3, \text{ or } A^n \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} n^2 - n - 1 \\ 4n \\ 4 \end{pmatrix}.$$

25 ♥ ★☆☆ Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ une matrice non nulle telle que $A^2 = 0$. Montrer que A est semblable à

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soient $E = \mathbb{R}^3$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ ayant pour matrice A dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E . On a alors $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$, donc $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$.

Ainsi, $\dim(\text{Im } f) \leq \dim(\text{Ker } f)$, c'est-à-dire

$$\text{rg } f \leq \dim(\text{Ker } f).$$

Par le théorème du rang, on a $\text{rg } f + \dim(\text{Ker } f) = 3$, donc $\text{rg } f < 2$. Comme de plus $\text{rg } f > 0$ car f est non nul, on a $\text{rg } f = 1$. Par conséquent, $\dim \text{Ker } f = 2$.

Comme f est non nul, donc il existe $e_3 \in E$ tel que $f(e_3) \neq 0$. On pose $e_1 = f(e_3)$, et on a donc $e_1 \in \text{Ker } f$. On complète en une base (e_1, e_2) de $\text{Ker } f$.

Ainsi, $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E , car elle est de bon

cardinal, et libre : on suppose

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0_E.$$

Alors, en composant par f , on obtient $\lambda_3 e_3 = 0_E$, donc $\lambda_3 = 0$. Ainsi, $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0_E$, et la liberté de la famille (e_1, e_2) donne $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Dans la base $\mathcal{B}'$, la matrice de f est B , donc A est semblable à B .

26 ♥ ★☆☆ Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall x \in E, (x, f(x)) \text{ est une famille liée.}$$

Montrer que f est une homothétie.

27 ★★★ *Matrices de trace nulle.*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n .

1. Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$ est telle que $\text{tr } u = 0$, alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est à diagonale nulle.

On pourra utiliser l'exercice 26.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\text{tr } M = 0$ si et seulement s'il existe $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $M = AB - BA$.

Indication.

1. Penser à une récurrence sur la dimension de E .
2. On pourra s'aider de l'exercice 22.

Projecteurs et symétries

28 ♥ ★☆☆ On considère l'application

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (4x - 6y, 2x - 3y)$$

Montrer que f est un projecteur de $\mathbb{R}^2$ et préciser ses éléments caractéristiques.

29 ♥ ★☆☆ On considère l'application

$$f : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto P - 2P'(0)X$$

Montrer que f est une symétrie de $\mathbb{K}[X]$ et préciser ses éléments caractéristiques.

30 ♥ ★☆☆ On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soient

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - z = 0\} \\ D = \text{Vect}((1, 0, -1)).$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. On note :
 p le projecteur sur P parallèlement à D ,
 q le projecteur sur D parallèlement à P ,
 s la symétrie par rapport à P parallèlement à D .
 Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$.

1. On a

$$P = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 2)), \quad D = \text{Vect}((1, 0, -1)).$$

Il suffit par conséquent de montrer que la famille $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (0, 1, 2), (1, 0, -1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ pour conclure que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$. On a

$$\begin{aligned} & \text{rg}((1, 0, 1), (0, 1, 2), (1, 0, -1)) \\ &= \text{rg}((1, 0, 1), (0, 1, 2), (0, 0, -2)) = 3 \end{aligned}$$

donc $((1, 0, 1), (0, 1, 2), (1, 0, -1))$ est une famille libre de bon cardinal de $\mathbb{R}^3$, c'est une base.

2. On écrit la décomposition des vecteurs de la base canonique dans la base $\mathcal{B}$ adaptée à $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

$$\begin{aligned} (1, 0, 0) &= \frac{1}{2}((1, 0, 1) + (1, 0, -1)) \\ (0, 1, 0) &= -(1, 0, 1) + (0, 1, 2) + (1, 0, -1) \\ (0, 0, 1) &= \frac{1}{2}((1, 0, 1) - (1, 0, -1)) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

31 ★★☆☆ Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et p, q deux projecteurs sur E .

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. On suppose que $p + q$ est un projecteur.
 - a. Montrer que $\text{Im}(p + q) = \text{Im } p + \text{Im } q$.
 - b. Montrer que $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$.