

DS 2

26.09.2026 – 4h

- Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés.
- Il est rappelé que :
 - ★ toute affirmation doit être rigoureusement justifiée,
 - ★ tout résultat obtenu doit être mis en valeur (encadré ou souligné).
- La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction sont autant de gages de bonne compréhension et compteront pour une part non négligeable dans l'appréciation de la copie.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

★ ★ ★

Exercice 1 – Un raffinement de la formule de Stirling

On rappelle la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

On introduit les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dont les termes généraux sont donnés par :

$$u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}, \quad v_n = \ln(u_n), \quad w_n = v_{n+1} - v_n.$$

1. Montrer qu'il existe un réel α que l'on précisera tel que $w_n \sim \frac{\alpha}{n^2}$, et en déduire la nature de la série $\sum w_n$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

À l'aide d'une comparaison série intégrale, déterminer un équivalent simple de R_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

On pourra commencer par écrire un encadrement de $\sum_{k=n}^N \frac{1}{k^2}$, où $N \geq n$.

3. Dédurre des questions précédentes un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} w_k$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
4. Dédurre de la question précédente que

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Exercice 2 – Matrices dont les valeurs propres sont sur la diagonale

Les matrices diagonales et les matrices triangulaires sont des exemples triviaux de matrices ayant leurs valeurs propres sur la diagonale. Cet exercice s'intéresse aux matrices vérifiant cette particularité.

Dans cet exercice, toutes les matrices sont à coefficients réels et n est un entier, $n \geq 2$. On dira qu'une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice à *diagonale propre* si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ et si ses termes diagonaux sont ses valeurs propres avec le même ordre de multiplicité.

En d'autres termes, A est à diagonale propre si son polynôme caractéristique est

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^n (X - a_{i,i}).$$

On pourra noter en abrégé : A est une MDP pour A est une matrice à diagonale propre. On notera $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.

Partie I – Exemples

1. Soient α un réel et

$$M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 2 & -\alpha \\ 1 & 1 & 2-\alpha \end{pmatrix}.$$

- Calculer le polynôme caractéristique de la matrice $M(\alpha)$. Montrer que, pour tout α , la matrice $M(\alpha)$ est une matrice à diagonale propre.
- Quelles sont les valeurs de α pour lesquelles la matrice $M(\alpha)$ est diagonalisable ?

2. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice antisymétrique A est-elle une matrice à diagonale propre ?

3. Cas $n = 2$. Déterminer $\mathcal{D}_2$.

Partie II – Une condition nécessaire et suffisante pour $n=3$

- Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice à diagonale propre soit inversible.
 - Donner un exemple de matrice à diagonale propre non diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible, et telle que A^{-1} est également une matrice à diagonale propre. On précisera la matrice A^{-1} .
5. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que A est une matrice à diagonale propre si et seulement si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

$$\det A = \prod_{i=1}^n a_{i,i}, \quad \text{et} \quad a_{1,2}a_{2,1} + a_{1,3}a_{3,1} + a_{2,3}a_{3,2} = 0.$$

Partie III – Quelques propriétés

- Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre, montrer que, pour tout couple (a, b) de réels, les matrices $aA + bI_n$ et $aA^\top + bI_n$ sont encore des matrices à diagonale propre.
- Matrices trigonalisables*
 - Une matrice trigonalisable est-elle nécessairement une matrice à diagonale propre ?
 - Justifier qu'une matrice à diagonale propre est trigonalisable.
 - Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ soit semblable à une matrice à diagonale propre.
- Démontrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme de deux matrices à diagonale propre. $\mathcal{D}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 3 – Convergence de séries par transformation d'Abel

1. On considère une suite de réels (a_n) , une suite de complexes (b_n) et on note pour tout entier naturel n :

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k b_k, \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=0}^n b_k.$$

En remarquant que, pour $k \geq 1$, $b_k = B_k - B_{k-1}$, montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n.$$

2. On suppose que la suite (B_n) est bornée et que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle.
- Justifier que la série $\sum (a_k - a_{k+1})$ converge.
 - En déduire que la série $\sum a_n b_n$ converge.
 - En appliquant le résultat précédent au cas où $b_n = (-1)^n$, donner une démonstration du théorème des séries alternées, après l'avoir énoncé.
3. *Exemple.* Dans cette question, θ est un réel différent de $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) et $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Calculer pour n entier naturel non nul,

$$\sum_{k=1}^n e^{ik\theta}.$$

- Discuter en fonction du réel α la nature de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}.$$

4. Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la nature de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 4 – Étude d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, et A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A .

On note $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et I_n la matrice identité.

On note φ_A l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\varphi_A(M) = AM - MA$$

Nous allons nous intéresser à la diagonalisabilité de φ_A .

Partie I – Étude du cas $n = 2$

Dans toute cette partie, on prendra $n = 2$.

- Vérifier que l'application φ_A est linéaire et que I_2 et A appartiennent à $\ker \varphi_A$.

Dans la suite de cette partie, on pose

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

- Donner la matrice de φ_A dans la base $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Dans la suite de cette partie, on suppose que $\varphi_A \neq 0$ (c'est-à-dire que $A \neq \lambda I_2$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$).

- Montrer que le polynôme caractéristique de φ_A est donné par

$$\chi_{\varphi_A} = X^2(X^2 - (d-a)^2 - 4bc).$$

- En déduire que φ_A est diagonalisable si et seulement si $(d-a)^2 + 4bc > 0$.
- Démontrer que φ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Partie II – Étude du cas général

On note $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

- On suppose dans cette question que A est diagonalisable.

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u (défini au début de l'exercice) et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, λ_i la valeur propre associée au vecteur e_i . On note alors P la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$ et

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Enfin, pour tout couple (i, j) d'entiers tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, on pose :

$$B_{i,j} = PE_{i,j}P^{-1}$$

- a. Exprimer, pour tout couple (i, j) , la matrice $DE_{i,j} - E_{i,j}D$ en fonction de la matrice $E_{i,j}$ et des réels λ_i et λ_j .
 - b. Montrer que, pour tout couple (i, j) , $B_{i,j}$ est un vecteur propre de φ_A .
 - c. En déduire que φ_A est diagonalisable.
7. On suppose dans cette question que φ_A est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $(P_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une base de vecteurs propres de φ_A et, pour tout couple (i, j) , $\lambda_{i,j}$ la valeur propre associée à $P_{i,j}$.
- a. Dans cette question, on considère A comme une matrice à coefficients complexes ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) et φ_A comme un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (défini par $\varphi_A(M) = AM - MA$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).
 - i. Justifier que toutes les valeurs propres de φ_A sont réelles.
 - ii. Soit $z \in \mathbb{C}$. Justifier que si z est une valeur propre de A , alors z est aussi une valeur propre de $A^\top$.
 - iii. Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que z et $\bar{z}$ sont deux valeurs propres de la matrice A . On considère alors $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ deux matrices colonnes non nulles telles que $AX = zX$ et $A^\top Y = \bar{z}Y$. En calculant $\varphi_A(XY^\top)$, montrer que $z - \bar{z}$ est une valeur propre de φ_A .
 - b. En déduire que la matrice A a au moins une valeur propre réelle.
- On note λ une valeur propre réelle de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une matrice colonne non nulle telle que $AX = \lambda X$.
- c. Montrer que, pour tout couple (i, j) , il existe un réel $\mu_{i,j}$, que l'on exprimera en fonction de λ et $\lambda_{i,j}$, tel que $AP_{i,j}X = \mu_{i,j}P_{i,j}X$.
 - d. En déduire que A est diagonalisable.

★ ★ ★