

DS 2

Corrigé

Exercice 1 – Un raffinement de la formule de Stirling (d'après Centrale PSI – 2023)

On rappelle la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

On introduit les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dont les termes généraux sont donnés par :

$$u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}, \quad v_n = \ln(u_n), \quad w_n = v_{n+1} - v_n.$$

1. Montrer qu'il existe un réel α que l'on précisera tel que $w_n \sim \frac{\alpha}{n^2}$, et en déduire la nature de la série $\sum w_n$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

À l'aide d'une comparaison série intégrale, déterminer un équivalent simple de R_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

On pourra commencer par écrire un encadrement de $\sum_{k=n}^N \frac{1}{k^2}$, où $N \geq n$.

3. Dédurre des questions précédentes un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} w_k$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
4. Dédurre de la question précédente que

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} w_n = v_{n+1} - v_n &= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(n+1)^{n+1} e^{-(n+1)} \sqrt{n+1} n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n} (n+1)!}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(n+1)^n e^{-1} \sqrt{n+1}}{n^n \sqrt{n}}\right) \\ &= -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Donc $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n^2}$ avec $\alpha = \frac{1}{12}$.

Par comparaison avec la série à termes positifs convergente $\sum \frac{1}{n^2}$, la série $\sum w_n$ converge aussi.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est continue et décroissante, donc par comparaison série intégrale, on a pour tout

$N > n$,

$$\int_2^{N+1} \frac{n+1}{t^2} dt \leq \sum_{k=n}^N \frac{1}{k^2} \leq \int_1^N \frac{1}{t^2} dt, \quad \text{donc} \quad \frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \leq \sum_{k=n}^N \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{N}.$$

En passant à la limite $N \rightarrow +\infty$, on obtient que

$$\frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}.$$

Par encadrement, on en déduit que $R_n \sim \frac{1}{n}$.

3. Comme $w_n \sim \frac{1}{12n^2}$ et $\sum \frac{1}{12n^2}$ converge, on déduit par sommation des relations de comparaison

$$\sum_{k=n}^{+\infty} w_k \sim \frac{1}{12} R_n \sim \frac{1}{12n}.$$

4. Par télescopage, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} w_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} (v_k) - v_n.$$

Or $v_k = \ln(u_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} -\ln(\sqrt{2\pi})$ d'après la formule de Stirling. D'après ce qui précède,

$$-\ln(\sqrt{2\pi}) - v_n = \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ainsi,

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \frac{1}{u_n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} e^{-v_n} = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Exercice 2 – Matrices dont les valeurs propres sont sur la diagonale (CCINP MP – 2008)

Les matrices diagonales et les matrices triangulaires sont des exemples triviaux de matrices ayant leurs valeurs propres sur la diagonale. Cet exercice s'intéresse aux matrices vérifiant cette particularité.

Dans cet exercice, toutes les matrices sont à coefficients réels et n est un entier, $n \geq 2$. On dira qu'une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice à *diagonale propre* si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ et si ses termes diagonaux sont ses valeurs propres avec le même ordre de multiplicité.

En d'autres termes, A est à diagonale propre si son polynôme caractéristique est

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^n (X - a_{i,i}).$$

On pourra noter en abrégé : A est une MDP pour A est une matrice à diagonale propre. On notera $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.

Partie I – Exemples

1. Soient α un réel et

$$M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 2 & -\alpha \\ 1 & 1 & 2-\alpha \end{pmatrix}.$$

a. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice $M(\alpha)$. Montrer que, pour tout α , la matrice $M(\alpha)$ est une matrice à diagonale propre.

b. Quelles sont les valeurs de α pour lesquelles la matrice $M(\alpha)$ est diagonalisable ?

2. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice antisymétrique A est-elle une matrice à diagonale propre ?

3. Cas $n = 2$. Déterminer $\mathcal{D}_2$.

Partie II – Une condition nécessaire et suffisante pour $n=3$

4. a. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice à diagonale propre soit inversible.
 b. Donner un exemple de matrice à diagonale propre non diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible, et telle que A^{-1} est également une matrice à diagonale propre. On précisera la matrice A^{-1} .
5. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que A est une matrice à diagonale propre si et seulement si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

$$\det A = \prod_{i=1}^n a_{i,i}, \quad \text{et} \quad a_{1,2}a_{2,1} + a_{1,3}a_{3,1} + a_{2,3}a_{3,2} = 0.$$

Partie III – Quelques propriétés

6. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre, montrer que, pour tout couple (a, b) de réels, les matrices $aA + bI_n$ et $aA^T + bI_n$ sont encore des matrices à diagonale propre.
7. *Matrices trigonalisables*
 a. Une matrice trigonalisable est-elle nécessairement une matrice à diagonale propre ?
 b. Justifier qu'une matrice à diagonale propre est trigonalisable.
 c. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ soit semblable à une matrice à diagonale propre.
8. Démontrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme de deux matrices à diagonale propre. $\mathcal{D}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

1. a. Le polynôme caractéristique de $M(\alpha)$ est, en faisant l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$:

$$\chi_{M(\alpha)} = \begin{vmatrix} X-1 & 1 & -\alpha \\ 0 & X-2 & \alpha \\ -1 & -1 & X-2+\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-1 & X-1 & 0 \\ 0 & X-2 & \alpha \\ -1 & -1 & X-2+\alpha \end{vmatrix} = (X-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & X-2 & \alpha \\ -1 & -1 & X-2+\alpha \end{vmatrix}$$

Ainsi, en faisant maintenant $L_3 \leftarrow L_1 + L_3$, on a $\chi_A = (X-1)(X-2)(X-(2-\alpha))$.

Comme $1, 2, 2-\alpha$ sont les coefficients diagonaux de $M(\alpha)$, la matrice $M(\alpha)$ est à diagonale propre.

- b. – Si $\alpha \notin \{0, 1\}$, alors $M(\alpha)$ a 3 valeurs propres distinctes, donc $M(\alpha)$ est diagonalisable.
 – Si $\alpha = 0$, les valeurs propres sont 1 de multiplicité 1, et 2 de multiplicité 2. Or

$$\text{rg}(M(0) - 2I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Ainsi, $\dim E_2(M(0)) = \dim(\text{Ker}(M(0) - 2I_3)) = 2$, donc $M(0)$ est diagonalisable.

- Si $\alpha = 1$, les valeurs propres sont 1 de multiplicité 2 et 2 de multiplicité 1.

$$\text{rg}(M(1) - I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Ainsi, la dimension de $E_1(M(1))$ est donc 1 et $M(1)$ n'est pas diagonalisable.

Finalement, $M(\alpha)$ est diagonalisable si et seulement si $\alpha \neq 1$.

2. On a, par exemple avec la règle de Sarrus, $\chi_A(X) = X^3 + X = X(X^2 + 1)$. Comme χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, la matrice A n'est pas à diagonale propre.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a alors

$$\chi_A = X^2 - (a+d)X + (ad-bc).$$

La matrice A est à diagonale propre si et seulement si $\chi_A = (X-a)(X-d) = X^2 - (a+d)X + ad$, c'est-à-dire si et seulement si $bc = 0$.

On en déduit que $\mathcal{D}_2$ est l'ensemble des matrices triangulaires.

4. a. Une matrice A est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de A . Ainsi, si A est à diagonale propre, A est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls.
 b. Il suffit de prendre une matrice triangulaire, non diagonale et inversible :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. La matrice A est une matrice à diagonale propre si et seulement si $\chi_A = (X - a_{11})(X - a_{22})(X - a_{33})$.
 Or un calcul donne (par exemple Sarrus) :

$$\chi_A = X^3 - \operatorname{tr}(A)X^2 + (a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21} - a_{13}a_{31} - a_{23}a_{32})X + \det A.$$

Comme par ailleurs $(X - a_{11})(X - a_{22})(X - a_{33}) = X^3 - \operatorname{tr}(A)X^2 - (a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32})X + a_{11}a_{22}a_{33}$, on a par identification :

$$\chi_A = (X - a_{11})(X - a_{22})(X - a_{33}) \Leftrightarrow \det A = \prod_{i=1}^3 a_{ii} \text{ et } a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} = 0.$$

6. Comme A est une MDP, les valeurs propres de A sont $a_{11}, a_{22} \dots a_{nn}$. On en déduit que les valeurs propres de $aA + bI_n$ sont $a a_{11} + b, a a_{22} + b, \dots, a a_{nn} + b$.

Comme il s'agit des termes diagonaux de $aA + bI_n$, la matrice $aA + bI_n$ est à diagonale propre.

Les termes diagonaux et le spectre d'une matrice et de sa transposée sont les mêmes, et $(aA + bI_n)^\top = aA^\top + bI_n$, donc $aA^\top + bI_n$ est donc une matrice à diagonale propre.

7. a. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $X^2 - 1$, donc $\operatorname{Sp}(A) = \{-1, 1\}$, et A est diagonalisable (et par conséquent trigonalisable), mais d'après la question 3., elle n'est pas à diagonale propre.
 b. Par définition, le polynôme caractéristique d'une matrice à diagonale propre est scindé, une telle matrice est donc trigonalisable.
 c. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice B à diagonale propre, alors $\chi_A = \chi_B$, et comme χ_B est scindé, χ_A l'est également.

Réciproquement, si χ_A est scindé, alors A est semblable à une matrice triangulaire, or toute matrice triangulaire est à diagonale propre. Par conséquent, A est semblable à une matrice à diagonale propre.

Finalement, A est semblable à une matrice à diagonale propre si et seulement si χ_A est scindé.

8. Comme toute matrice triangulaire est à diagonale propre, il suffit d'écrire $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme une somme de deux matrices triangulaires :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Si $n \geq 2$, la matrice écrite par blocs

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas à diagonale propre, mais elle s'écrit comme somme de deux matrices (triangulaires) à diagonale propre, donc $\mathcal{D}_n$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3 – Convergence de séries par transformation d'Abel (CCINP MP – 2014)

1. On considère une suite de réels (a_n) , une suite de complexes (b_n) et on note pour tout entier naturel n :

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k b_k, \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=0}^n b_k.$$

En remarquant que, pour $k \geq 1$, $b_k = B_k - B_{k-1}$, montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1})B_k + a_n B_n.$$

2. On suppose que la suite (B_n) est bornée et que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle.

a. Justifier que la série $\sum (a_k - a_{k+1})$ converge.

b. En déduire que la série $\sum a_n b_n$ converge.

c. En appliquant le résultat précédent au cas où $b_n = (-1)^n$, donner une démonstration du théorème des séries alternées, après l'avoir énoncé.

3. *Exemple.* Dans cette question, θ est un réel différent de $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) et $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Calculer pour n entier naturel non nul,

$$\sum_{k=1}^n e^{ik\theta}.$$

b. Discuter en fonction du réel α la nature de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}.$$

4. Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la nature de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n a_k (B_k - B_{k-1}) = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n a_k B_k - \sum_{k=1}^n a_k B_{k-1}.$$

Dans la dernière somme, on effectue le changement d'indice $j = k - 1$.

$$\begin{aligned} S_n &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n a_k B_k - \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} B_j = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n - a_1 B_0 \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k - (a_0 - a_1) B_0 + a_n B_n - a_1 b_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n. \end{aligned}$$

2. a. On sait que la suite (a_n) et la série $\sum_{k \geq 0} (a_k - a_{k+1})$ sont de même nature, donc la série converge.

b. Vérifions que la suite (S_n) des sommes partielles est convergente. D'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n.$$

Le second terme $(a_n B_n)$ tend vers 0 car produit d'une suite convergente vers 0 et d'une suite bornée.

Le premier terme est une somme partielle de la série de terme général $(a_k - a_{k+1}) B_k$. Notons $M > 0$ un majorant de la suite $(|B_n|)$. Alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, |(a_k - a_{k+1}) B_k| \leq |a_k - a_{k+1}| M = (a_k - a_{k+1}) M$$

car (a_k) est une suite décroissante.

Ainsi, par comparaison avec une série absolument convergente, $(a_k - a_{k+1}) \times B_k$ est le terme général d'une série absolument convergente, ce qui conclut.

c. Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. Alors $\sum_{k \geq 0} (-1)^k a_k$ est une série convergente.

Il suffit d'appliquer le résultat de la question précédente après avoir justifié que la suite $(B_n) = \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \right)$ est bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n \in \{1, 0\}$ donc $|B_n| \leq 1$, ce qui conclut.

3. a. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\theta}$. Notons que, par hypothèse, $e^{i\theta} \neq 1$. On a :

$$\sum_{k=1}^n e^{ik\theta} = e^{i\theta} \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}} = e^{i\theta} \frac{e^{in\theta/2} (-2i) \sin(n\theta/2)}{e^{i\theta/2} (-2i) \sin(\theta/2)} = e^{i(n+1)\theta/2} \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.$$

b. Lorsque $\alpha > 1$, la série de terme général $\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est absolument convergente donc convergente.

Lorsque $\alpha \leq 0$, le module du terme général ne tend pas vers 0 donc la série est grossièrement divergente.

Soit $\alpha \in]0, 1]$. On va montrer que la série est convergente par application du résultat de la question 2b. Notons tout de même que le fait que la série commence à $n = 1$ à la place de $n = 0$ n'a pas d'incidence. La suite $(1/n^\alpha)$ est clairement décroissante et tend vers 0. D'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} \right| \leq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}$$

donc la suite des sommes partielles est bornée. Par conséquent, la série est convergente.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $z_n = \frac{e^{inx}}{n^{1/2}}$.

Lorsque $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, la question précédente assure la convergence de la série de terme général z_n , donc la convergence de la série de terme général $\operatorname{Im}(z_n) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

Lorsque $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, $u_n(x) = 0$ ce qui est bien le terme général d'une série convergente. Ceci conclut.

Exercice 4 – Étude d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (CCINP MP – 2012)

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, et A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A .

On note $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et I_n la matrice identité.

On note φ_A l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\varphi_A(M) = AM - MA$$

Nous allons nous intéresser à la diagonalisabilité de φ_A .

Partie I – Étude du cas $n = 2$

Dans toute cette partie, on prendra $n = 2$.

1. Vérifier que l'application φ_A est linéaire et que I_2 et A appartiennent à $\ker \varphi_A$.

Dans la suite de cette partie, on pose

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

2. Donner la matrice de φ_A dans la base $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Dans la suite de cette partie, on suppose que $\varphi_A \neq 0$ (c'est-à-dire que $A \neq \lambda I_2$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$).

3. Montrer que le polynôme caractéristique de φ_A est donné par

$$\chi_{\varphi_A} = X^2(X^2 - (d-a)^2 - 4bc).$$

4. En déduire que φ_A est diagonalisable si et seulement si $(d-a)^2 + 4bc > 0$.

5. Démontrer que φ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Partie II – Étude du cas général

On note $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

6. On suppose dans cette question que A est diagonalisable.

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u (défini au début de l'exercice) et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, λ_i la valeur propre associée au vecteur e_i . On note alors P la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$ et

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Enfin, pour tout couple (i, j) d'entiers tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, on pose :

$$B_{i,j} = P E_{i,j} P^{-1}$$

- Exprimer, pour tout couple (i, j) , la matrice $D E_{i,j} - E_{i,j} D$ en fonction de la matrice $E_{i,j}$ et des réels λ_i et λ_j .
- Montrer que, pour tout couple (i, j) , $B_{i,j}$ est un vecteur propre de φ_A .
- En déduire que φ_A est diagonalisable.

7. On suppose dans cette question que φ_A est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $(P_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une base de vecteurs propres de φ_A et, pour tout couple (i, j) , $\lambda_{i,j}$ la valeur propre associée à $P_{i,j}$.

- Dans cette question, on considère A comme une matrice à coefficients complexes ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) et φ_A comme un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (défini par $\varphi_A(M) = AM - MA$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).
 - Justifier que toutes les valeurs propres de φ_A sont réelles.
 - Soit $z \in \mathbb{C}$. Justifier que si z est une valeur propre de A , alors z est aussi une valeur propre de $A^\top$.
 - Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que z et $\bar{z}$ sont deux valeurs propres de la matrice A . On considère alors $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ deux matrices colonnes non nulles telles que $AX = zX$ et $A^\top Y = \bar{z}Y$.
En calculant $\varphi_A(XY^\top)$, montrer que $z - \bar{z}$ est une valeur propre de φ_A .

- En déduire que la matrice A a au moins une valeur propre réelle.

On note λ une valeur propre réelle de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une matrice colonne non nulle telle que $AX = \lambda X$.

- Montrer que, pour tout couple (i, j) , il existe un réel $\mu_{i,j}$, que l'on exprimera en fonction de λ et $\lambda_{i,j}$, tel que $AP_{i,j}X = \mu_{i,j}P_{i,j}X$.
- En déduire que A est diagonalisable.

- Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et M, N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi_A(\lambda M + \mu N) &= A(\lambda M + \mu N) - (\lambda M + \mu N)A \\ &= \lambda(AM - MA) + \mu(AN - NA) \\ &= \lambda\varphi_A(M) + \mu\varphi_A(N). \end{aligned}$$

Donc φ_A est bien linéaire, de plus, $\varphi(I_2) = \varphi_A(A) = 0$, c'est à dire I_2 et A sont dans $\ker \varphi_A$.

- Les calculs montrent que :

$$\begin{cases} \varphi_A(E_{11}) = cE_{21} - bE_{12} \\ \varphi_A(E_{12}) = -cE_{11} + (a-d)E_{12} + cE_{22} \\ \varphi_A(E_{21}) = bE_{11} + (d-a)E_{21} - bE_{22} \\ \varphi_A(E_{22}) = bE_{12} - cE_{21} \end{cases}$$

D'où la matrice de φ_A dans la base canonique $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{bmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{bmatrix}.$$

- Le polynôme caractéristique de φ_A est donné, en posant $\delta = b - a$, par :

$$\begin{aligned} \chi_{\varphi_A} &= \begin{vmatrix} X & c & -b & 0 \\ b & X+\delta & 0 & -b \\ -c & 0 & X-\delta & c \\ 0 & -c & b & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & c & -b & 0 \\ b & X+\delta & 0 & -b \\ -c & 0 & X-\delta & c \\ X & 0 & 0 & X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} X & c & -b & 0 \\ b & X+\delta & 0 & -b \\ -c & 0 & X-\delta & c \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= X \begin{vmatrix} X & c & -b & 0 \\ 0 & X+\delta & 0 & -b \\ 0 & 0 & X-\delta & c \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = X(X(X-\delta)(X+\delta) - 2(bc(X+\delta) + bc(X-\delta))). \end{aligned}$$

Ainsi, $\chi_{\varphi_A} = X^2(X^2 - \delta^2 - 4bc) = X^2(X^2 - (d-a)^2 - 4bc)$.

- Si $(d-a)^2 + 4bc > 0$, on aura trois valeurs propres, 0 valeur propre double et les autres sont simples et comme $\text{Vect}(I_2, A) \subset E_0$ (E_0 le sous-espace propre associé à 0) et $A \neq \lambda I_2$, alors $\dim E_0 = 2$ est donc φ_A est diagonalisable.

Inversement, si φ_A est diagonalisable, alors nécessairement le polynôme caractéristique de φ_A admettra des racines réelles autres que 0, sinon $A = 0$, et donc $(d - a)^2 + 4bc > 0$.

5. Le polynôme caractéristique de A est $X^2 - (a + d)X + ad - bc$. La matrice A étant différente de λI_2 , donc A est diagonalisable si et seulement si l'équation $X^2 - (a + d)X + ad - bc = 0$ admet deux racines réelles et distinctes, c'est à dire si et seulement si $(a + d)^2 - 4(ad - bc) = (d - a)^2 + 4bc > 0$ et ceci est équivalent à dire que φ_A est diagonalisable par la question précédente.

6. a. Écrivons D sous la forme $D = \sum_{l=1}^n \lambda_l E_{ll}$, donc

$$\begin{aligned} DE_{ij} - E_{ij}D &= \sum_{l=1}^n \lambda_l E_{ll} E_{ij} - \sum_{l=1}^n \lambda_l E_{ij} E_{ll} \\ &= \sum_{l=1}^n \lambda_l \delta_{li} E_{lj} - \sum_{l=1}^n \lambda_l \delta_{jl} E_{il} \\ &= \lambda_i E_{ij} - \lambda_j E_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j) E_{ij}. \end{aligned}$$

- b. On a, pour tout couple (i, j) :

$$\begin{aligned} \varphi_A(B_{ij}) &= AB_{ij} - B_{ij}A \\ &= APE_{ij}P^{-1} - PE_{ij}P^{-1}A \\ &= PDE_{ij}P^{-1} - PE_{ij}DP^{-1} \\ &= P(DE_{ij} - E_{ij}D)P^{-1} = (\lambda_i - \lambda_j) B_{ij}. \end{aligned}$$

- c. Les B_{ij} forment une famille de n^2 vecteurs propres de φ_A . De plus, la famille $(B_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est libre :

$$\text{si } \sum_{1 \leq i, j \leq n} \alpha_{ij} B_{ij} = 0, \text{ alors } \sum_{1 \leq i, j \leq n} \alpha_{ij} E_{ij} = 0,$$

et comme la famille des matrices élémentaires est libre (base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), il est de même pour la famille $(B_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, en conclusion φ_A est diagonalisable.

On peut aussi remarquer que l'application $m \mapsto PMP^{-1}$ est un isomorphisme.

7. a. i. Comme φ_A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$, donc toutes ses racines sont réelles. Si φ_A est vu comme endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il a même polynôme caractéristique, et ses valeurs propres sont toutes réelles.
- ii. A et $A^\top$ ont le même polynôme caractéristique, et comme les valeurs propres d'une matrice sont les racines de son polynôme caractéristique, alors A et $A^\top$ ont les mêmes valeurs propres.
- iii. On a $\varphi_A(XY^\top) = AXY^\top - XY^\top A = zXY^\top - X(A^\top Y)^\top = zXY^\top - X\bar{z}Y^\top = (z - \bar{z})XY^\top$, et comme $XY^\top \neq 0$, $z - \bar{z}$ est une valeur propre de φ_A .
- b. Si A admet une valeur propre $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors comme $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$, $\bar{z}$ est aussi valeur propre de A . Par la question précédente, $z - \bar{z}$ est valeur propre de φ_A , qui n'est pas réelle, ce qui est impossible car φ_A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
- c. Pour tout couple (i, j) , on a $\varphi_A(P_{i,j}) = \lambda_{i,j}P_{i,j}$, c'est-à-dire $AP_{i,j} - P_{i,j}A = \lambda_{i,j}P_{i,j}$. Ainsi,

$$AP_{i,j}X = P_{i,j}AX + \lambda_{i,j}P_{i,j}X = (\lambda + \lambda_{i,j})P_{i,j}X,$$

car $AX = \lambda X$. Il suffit de prendre $\mu_{ij} = \lambda + \lambda_{i,j}$.

- d. Considérons l'application linéaire suivante :

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto MX \end{aligned}$$

Montrons que cette application est surjective, en effet, considérons un $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

- Si $Y = 0$, on prend $M = 0$;
- Si $Y \neq 0$, on complète X et Y pour avoir deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui commencent par X et Y , et soit v l'application linéaire qui transforme $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$ et M la matrice canoniquement associée à v , donc on a bien $Y = MX$.

La famille $(P_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc son image par Ψ est génératrice de $\text{Im } \Psi = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car Ψ est surjective, ainsi $(P_{i,j}X)_{1 \leq i, j \leq n}$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée par des vecteurs propres de A , de la quelle on peut extraire une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc A est diagonalisable.