

DS 1

12.09.2026 – 4h

- Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés.
- Il est rappelé que :
 - ★ toute affirmation doit être rigoureusement justifiée,
 - ★ tout résultat obtenu doit être mis en valeur (encadré ou souligné).
- La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction sont autant de gages de bonne compréhension et compteront pour une part non négligeable dans l'appréciation de la copie.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

★ ★ ★

Exercice 1 – Étude d'une série

On considère la série $\sum u_n$, où

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right).$$

1. Montrer qu'il existe un réel α qu'on déterminera tel que

$$\pi\sqrt{n^2 + n + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

2. Dédurre de la question précédente que $\sum u_n$ converge.
3. La série $\sum u_n$ converge-t-elle absolument ?

Exercice 2 – Une équation différentielle

On considère sur $]0, 1]$ l'équation différentielle

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = \frac{1}{x\sqrt{x}} \quad (E)$$

1. Déterminer les solutions de l'équation homogène

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0 \quad (E_0)$$

qui sont sous la forme $y : x \mapsto x^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Déterminer une solution de (E) sous la forme $y : x \mapsto \frac{z(x)}{x^2}$, où z est une fonction deux fois dérivable sur $]0, 1]$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E) .

On pourra utiliser le résultat : l'ensemble des solutions de l'équation homogène (E_0) est un espace vectoriel de dimension 2.

Exercice 3 – Matrices nilpotentes

Soient n un entier naturel non nul et E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n .

On rappelle qu'un endomorphisme u de E est dit nilpotent s'il existe un entier $p \geq 1$ tel que

$$u^p = u \circ \dots \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

On appelle alors indice de nilpotence de u le plus petit entier $p \geq 1$ tel que $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

De même, une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite nilpotente s'il existe un entier naturel $p \geq 1$ tel que $M^p = 0$.

Ainsi, si $\mathcal{B}$ est une base de E , un endomorphisme de E est nilpotent d'indice p si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est nilpotente d'indice p .

1. Que peut-on dire d'un endomorphisme nilpotent d'indice 1 ?

Réduction d'un endomorphisme nilpotent en dimension 2

On suppose que $n = 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geq 2$.

2. Justifier qu'il existe un vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_E$.
3. Vérifier que la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre. En déduire que $p = 2$, on a donc $u \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
4. Montrer que $\text{Ker } u = \text{Im } u$. On pourra commencer par justifier que $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$.
5. À l'aide de la question 3, construire une base de E dans laquelle la matrice de u est égale à

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. En déduire que les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sont exactement les matrices de trace et déterminant nuls.

Réduction d'un endomorphisme nilpotente d'indice 2

On suppose que $n \geq 3$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice 2 et de rang r .

7. Montrer que $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$ et que $2r \leq n$.
8. On suppose que $\text{Im } u = \text{Ker } u$. Montrer qu'il existe $e_1, e_2, \dots, e_r \in E$ tels que la famille

$$\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r))$$

est une base de E .

9. Donner la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

10. On suppose $\text{Im}(u) \neq \text{Ker}(u)$. Montrer qu'il existe $e_1, e_2, \dots, e_r \in E$ et $v_1, v_2, \dots, v_{n-2r} \in \text{Ker } u$ tels que

$$\mathcal{B}' = (e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, v_2, \dots, v_{n-2r})$$

est une base de E .

11. Donner la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 4 – Dimension du commutant

Dans tout ce problème, E désigne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.

Pour tout endomorphisme u de E , on note $\mathcal{C}(u)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec u :

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E), u \circ v = v \circ u\}.$$

De même, pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note

$$\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM = MA\}.$$

On rappelle qu'une homothétie est un endomorphisme de E de la forme λId_E , où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Partie I – Autour des homothéties

Soit u un endomorphisme de E .

1. a. Montrer que $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Justifier que $\dim \mathcal{C}(u) \leq n^2$.
b. Dans le cas où u est une homothétie, montrer que $\mathcal{C}(u) = \mathcal{L}(E)$ et préciser la dimension de $\mathcal{C}(u)$.

2. On suppose que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée. On note $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E .
 - a. Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe λ_i tel que $u(e_i) = \lambda_i e_i$.
 - b. Soit $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$. En considérant $u(e_1 + e_i)$, montrer que $\lambda_i = \lambda_1$.
 - c. En déduire que u est une homothétie.
3. On suppose dans cette question que $\dim \mathcal{C}(u) = n^2$. Montrer que u est une homothétie.
Pour un vecteur $x \in E$, on pourra considérer un projecteur sur $\text{Vect}(x)$.

Partie II – Majoration de la dimension du commutant

Dans toute cette partie, on suppose que u n'est pas une homothétie. On pourra admettre le résultat de la question 2.

4. Dans cette question, on suppose $n = \dim E = 2$.
 - a. Justifier qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$.
 - b. Montrer que $\mathcal{C}(A) = \text{Vect}(I_2, A)$.
 - c. En déduire que $\dim \mathcal{C}(u) = 2$.
5. On suppose désormais que n est un entier tel que $n \geq 2$. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui ne sont pas colinéaires à la matrice I_n . On considère le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donné par

$$\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM = MB\}.$$

- a. Justifier que A et B sont respectivement semblables à des matrices A' et B' de la forme

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \star & \dots & \dots & \dots & \star \\ \vdots & & & & \vdots \\ \star & \dots & \dots & \dots & \star \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad B' = \begin{bmatrix} 0 & \star & \dots & \dots & \star \\ 1 & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \star & \dots & \dots & \star \end{bmatrix}.$$

- b. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}' = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A'M = MB'\}$ sont isomorphes.
- c. Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice non nulle de la forme

$$M = \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & \beta & & & L \\ \hline 0 & & & & \\ \vdots & C & & & 0 \\ 0 & & & & \end{array} \right]$$

où $L \in \mathcal{M}_{1,n-2}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n-2,1}(\mathbb{R})$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, alors $M \notin \mathcal{F}'$.

- d. En déduire que $\dim \mathcal{F}' \leq n^2 - (2n - 2)$.
6. Dédurre des questions précédentes que, si $u \in \mathcal{L}(E)$ n'est pas une homothétie, alors

$$\dim \mathcal{C}(u) \leq (n-1)^2 + 1.$$

Exercice bonus – Lemme de Schur

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{L}(E)$ telle que les seuls sous-espaces stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ soient $\{0_E\}$ ou E .

1. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dans cette question. Montrer que les seuls endomorphismes $u \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont les homothéties.
2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, donner une condition suffisante sur $\dim E$ pour que le résultat reste vrai.
3. Montrer que le résultat est faux en toute généralité si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.