

DS 1

Corrigé

Exercice 1 – Étude d'une série

On considère la série $\sum u_n$, où

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \cos \left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1} \right).$$

1. Montrer qu'il existe un réel α qu'on déterminera tel que

$$\pi \sqrt{n^2 + n + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

2. Dédurre de la question précédente que $\sum u_n$ converge.
 3. La série $\sum u_n$ converge-t-elle absolument ?

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\pi \sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$. Or, au voisinage de $+\infty$,

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) - \frac{1}{8n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = 1 + \frac{1}{2n} + \frac{3}{8n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Donc, $\pi \sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3}{8} \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \cos \left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1} \right)$. D'après la question précédente,

$$v_n = \cos \left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3}{8} \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = (-1)^{n+1} \sin \left(\frac{3}{8} \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right).$$

Par conséquent, on peut écrire $v_n = (-1)^{n+1} \frac{3\pi}{8} \frac{1}{n} + w_n$, où $w_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Comme $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge (d'après le critère spécial des séries alternées) et $\sum w_n$ converge (par critère de domination), on en déduit que $\sum v_n$ converge.

3. D'après la question précédente, on a

$$|v_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{3\pi}{8n}.$$

Or la série à termes positifs $\sum \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique), donc $\sum |v_n|$ diverge, c'est-à-dire que $\sum v_n$ ne converge pas absolument.

Exercice 2 – Une équation différentielle

On considère sur $]0, 1]$ l'équation différentielle

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = \frac{1}{x\sqrt{x}} \tag{E}$$

1. Déterminer les solutions de l'équation homogène

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0 \tag{E_0}$$

qui sont sous la forme $y : x \mapsto x^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Déterminer une solution de (E) sous la forme $y : x \mapsto \frac{z(x)}{x^2}$, où z est une fonction deux fois dérivable sur $]0, 1]$.
- En déduire l'ensemble des solutions de (E) .

On pourra utiliser le résultat : l'ensemble des solutions de l'équation homogène (E_0) est un espace vectoriel de dimension 2.

- Soit $y : x \mapsto x^\alpha$ une solution de (E_0) . Pour tout $x \in]0, 1]$, on a

$$x^2 y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = \alpha(\alpha - 1)x^\alpha + 4\alpha x^\alpha + 2x^\alpha = (\alpha^2 + 3\alpha + 2)x^\alpha$$

Ainsi, comme y est solution de (E_0) , on a en particulier $\alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0$, c'est-à-dire $\alpha = -1$ ou $\alpha = -2$. Par ailleurs, d'après ce qui précède, si $\alpha \in \{-1, -2\}$, alors $y : x \mapsto x^\alpha$ est solution de (E_0) .

Ainsi, $y_1 : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $y_2 : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sont les seules solutions de (E_0) de la forme souhaitée.

- Cherchons maintenant une solution de (E) sous la forme $y : x \mapsto \frac{z(x)}{x^2}$. On a donc $z(x) = x^2 y(x)$ pour tout $x \in]0, 1]$. Ainsi, pour tout $x \in]0, 1]$,

$$z'(x) = 2xy(x) + x^2 y'(x), \quad \text{et} \quad z''(x) = 2y(x) + 4xy'(x) + x^2 y''(x)$$

Par conséquent, z est solution de $z'' = \frac{1}{x\sqrt{x}}$, dont une solution particulière est $z : x \mapsto -4\sqrt{x}$. Ceci donne $y : x \mapsto \frac{-4}{x\sqrt{x}}$.

- La famille (y_1, y_2) est une famille libre, les deux fonctions y_1 et y_2 étant non colinéaires. Comme l'ensemble des solutions de l'équation homogène (E_0) est un espace vectoriel de dimension 2, il s'écrit $\text{Vect}(y_1, y_2)$.

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions de la forme

$$y : x \mapsto \frac{-4}{x\sqrt{x}} + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}, \quad \text{où } a, b \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3 – Matrices nilpotentes

Soient n un entier naturel non nul et E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n .

On rappelle qu'un endomorphisme u de E est dit nilpotent s'il existe un entier $p \geq 1$ tel que

$$u^p = u \circ \dots \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

On appelle alors indice de nilpotence de u le plus petit entier $p \geq 1$ tel que $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

De même, une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite nilpotente s'il existe un entier naturel $p \geq 1$ tel que $M^p = 0$.

Ainsi, si $\mathcal{B}$ est une base de E , un endomorphisme de E est nilpotent d'indice p si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est nilpotente d'indice p .

- Que peut-on dire d'un endomorphisme nilpotent d'indice 1 ?

Réduction d'un endomorphisme nilpotent en dimension 2

On suppose que $n = 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geq 2$.

- Justifier qu'il existe un vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_E$.
- Vérifier que la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre. En déduire que $p = 2$, on a donc $u \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- Montrer que $\text{Ker } u = \text{Im } u$. On pourra commencer par justifier que $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$.
- À l'aide de la question 3, construire une base de E dans laquelle la matrice de u est égale à

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- En déduire que les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sont exactement les matrices de trace et déterminant nuls.

Réduction d'un endomorphisme nilpotente d'indice 2

On suppose que $n \geq 3$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice 2 et de rang r .

- Montrer que $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$ et que $2r \leq n$.

8. On suppose que $\text{Im } u = \text{Ker } u$. Montrer qu'il existe $e_1, e_2, \dots, e_r \in E$ tels que la famille

$$\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r))$$

est une base de E .

9. Donner la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

10. On suppose $\text{Im}(u) \neq \text{Ker}(u)$. Montrer qu'il existe $e_1, e_2, \dots, e_r \in E$ et $v_1, v_2, \dots, v_{n-2r} \in \text{Ker } u$ tels que

$$\mathcal{B}' = (e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, v_2, \dots, v_{n-2r})$$

est une base de E .

11. Donner la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$.

- Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent d'indice 1, alors $u^1 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc u est nul.
- Comme p est le plus petit entier tel que $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$, on a $u^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Autrement dit, il existe $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_E$.
- Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0_E$. Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ tel que $\lambda_i \neq 0$. On considère alors m le plus petit entier tel que $\lambda_m \neq 0$. On a alors

$$\lambda_m u^m(x) + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0_E.$$

En composant par u^{p-m-1} , on obtient $\lambda_m u^{p-1}(x) = 0_E$, car pour tout $i > m$, $u^{p-m-1+i}(x) = u^p(u^{i-m-1}(x)) = 0_E$. Comme $u^{p-1}(x) \neq 0_E$, ceci entraîne que $\lambda_m = 0$, ce qui est en contradiction.

N.B. : On pouvait aussi remarquer qu'en composant par u^{p-1} dans l'égalité de départ, on obtient $\lambda_0 = 0$, et raisonner par récurrence.

Comme $\dim E = 2$, toute famille libre est de cardinal au plus 2. La famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ étant de cardinal p , on a $p \leq 2$. Comme on a aussi supposé $p \geq 2$, on en déduit $p = 2$.

- Soit $y \in \text{Im } u$. On sait qu'il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Ainsi, $u(y) = u^2(x) = 0_E$ comme $u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$, donc $y \in \text{Ker } u$. On a alors montré que $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$.

L'endomorphisme u n'est pas bijectif, sinon u^2 le serait également. Par conséquent, on a $\text{rg}(u) \leq 1$. Par ailleurs, on a $u \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$, sinon u serait nilpotent d'indice 1. On en déduit que $\text{rg}(u) \geq 1$. Finalement $\text{rg}(u) = 1$. Le théorème du rang entraîne alors que $\dim(\text{Ker } u) = 2 - \text{rg}(u) = 1$.

Finalement, $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$, et les sous-espaces vectoriels $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont de même dimension, donc $\text{Im } u = \text{Ker } u$.

- D'après la question 3, comme on a vu que $p = 2$, la famille $\mathcal{B} = (x, u(x))$, où x est le vecteur de la question 2, est libre. Comme elle est de bon cardinal, c'est une base de E . Par ailleurs, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u(x) & u(u(x)) \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ u(x) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

- $\Rightarrow$ Soit A est une matrice nilpotente d'indice noté p .
 - Si $p = 1$, alors A est nulle, donc de trace et déterminant nuls.
 - Supposons $p \geq 2$, et notons u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé à A . Ainsi, u est nilpotent d'indice $p \geq 2$, donc $p = 2$ d'après la question 2. D'après la question précédente, u a pour matrice J_2 dans une base $\mathcal{B}$, donc A est semblable à J_2 , ce qui entraîne que $\text{tr } A = \text{tr } J_2 = 0$ et $\det A = \det J_2 = 0$.

$\Leftarrow$ Supposons que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie $\text{tr } A = 0$ et $\det A = 0$.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ alors } A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

Comme $\text{tr } A = a + d = 0$, et $\det A = ad - bc = -a^2 - bc = 0$, on obtient que A^2 est nulle.

- Comme $u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$, on a $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$ comme dans la question 4. Ainsi, $\text{rg}(u) = \dim(\text{Im } u) \leq \dim(\text{Ker } u)$. En utilisant le théorème du rang, on obtient

$$n = \dim(\text{Ker } u) + \text{rg}(u) \geq 2 \text{rg}(u), \quad \text{donc } 2r \leq n.$$

- On considère un supplémentaire G de $\text{Ker } u$ dans E . On sait par le théorème du rang (forme géométrique), que u induit un isomorphisme de G sur $\text{Im } u$. Ainsi, $\dim G = r$, et si $(e_1, \dots, e_r)$ est une base de G , on sait ^a que

$(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est une base de $\text{Im } u$.

On en déduit que $(e_1, \dots, e_r, u(e_1), \dots, u(e_r))$ est une base de E comme concaténation d'une base de G et d'une base de $\text{Ker } u = \text{Im } u$. En réordonnant ses vecteurs, on obtient une base de la forme souhaitée.

9. La matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par blocs par :

$$\begin{bmatrix} J_2 & & \\ & \ddots & \\ & & J_2 \end{bmatrix}.$$

10. Comme dans la question 8, on considère un supplémentaire G de $\text{Ker } u$ dans E , et on sait que u induit un isomorphisme de G sur $\text{Im } u$. Si $(e_1, \dots, e_r)$ est une base de G , alors $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est une base de $\text{Im } u$.

Par ailleurs, comme $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$, on peut compléter la famille $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ en une base de $\text{Ker } u$ en ajoutant $\dim(\text{Ker } u) - r = (n - r) - r = n - 2r$ vecteurs notés $v_1, \dots, v_{n-2r}$.

La famille $(e_1, \dots, e_r, u(e_1), \dots, u(e_r), v_1, \dots, v_{n-2r})$ est une base de E comme concaténation d'une base de G et d'une base de $\text{Ker } u$. En réordonnant ses vecteurs, on obtient une base de la forme souhaitée.

11. La matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$ est alors donnée par

$$\begin{bmatrix} J_2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & J_2 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

où le dernier blocs diagonal est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n-2r}(\mathbb{C})$.

a. On rappelle qu'un isomorphisme envoie toujours une base de l'espace de départ sur une base de l'espace d'arrivée.

Exercice 4 – Dimension du commutant

Dans tout ce problème, E désigne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.

Pour tout endomorphisme u de E , on note $\mathcal{C}(u)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec u :

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E), u \circ v = v \circ u\}.$$

De même, pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note

$$\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM = MA\}.$$

On rappelle qu'une homothétie est un endomorphisme de E de la forme λId_E , où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Partie I – Autour des homothéties

Soit u un endomorphisme de E .

1. a. Montrer que $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Justifier que $\dim \mathcal{C}(u) \leq n^2$.
b. Dans le cas où u est une homothétie, montrer que $\mathcal{C}(u) = \mathcal{L}(E)$ et préciser la dimension de $\mathcal{C}(u)$.
2. On suppose que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée. On note $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E .
a. Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe λ_i tel que $u(e_i) = \lambda_i e_i$.
b. Soit $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$. En considérant $u(e_1 + e_i)$, montrer que $\lambda_i = \lambda_1$.
c. En déduire que u est une homothétie.
3. On suppose dans cette question que $\dim \mathcal{C}(u) = n^2$. Montrer que u est une homothétie.
Pour un vecteur $x \in E$, on pourra considérer un projecteur sur $\text{Vect}(x)$.

Partie II – Majoration de la dimension du commutant

Dans toute cette partie, on suppose que u n'est pas une homothétie. On pourra admettre le résultat de la question 2.

4. Dans cette question, on suppose $n = \dim E = 2$.
a. Justifier qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$.

- b. Montrer que $\mathcal{C}(A) = \text{Vect}(I_2, A)$.
- c. En déduire que $\dim \mathcal{C}(u) = 2$.
5. On suppose désormais que n est un entier tel que $n \geq 2$. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui ne sont pas colinéaires à la matrice I_n . On considère le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donné par

$$\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM = MB\}.$$

- a. Justifier que A et B sont respectivement semblables à des matrices A' et B' de la forme

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \star & \dots & \dots & \dots & \star \\ \vdots & & & & \vdots \\ \star & \dots & \dots & \dots & \star \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad B' = \begin{bmatrix} 0 & \star & \dots & \dots & \star \\ 1 & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \star & \dots & \dots & \star \end{bmatrix}.$$

- b. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}' = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A'M = MB'\}$ sont isomorphes.
- c. Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice non nulle de la forme

$$M = \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & \beta & & & L \\ \hline 0 & & & & \\ \vdots & C & & & 0 \\ 0 & & & & \end{array} \right]$$

où $L \in \mathcal{M}_{1,n-2}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n-2,1}(\mathbb{R})$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, alors $M \notin \mathcal{F}'$.

- d. En déduire que $\dim \mathcal{F}' \leq n^2 - (2n - 2)$.
6. Déduire des questions précédentes que, si $u \in \mathcal{L}(E)$ n'est pas une homothétie, alors

$$\dim \mathcal{C}(u) \leq (n - 1)^2 + 1.$$

1. a. On a $\mathcal{C}(u) \subset \mathcal{L}(E)$.

- Comme $u \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)} \circ u$, on a $0_{\mathcal{L}(E)} \in \mathcal{C}(u)$.
- Soient $v_1, v_2 \in \mathcal{C}(u)$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. On a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in \mathcal{C}(u)$:

$$(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \circ u = \lambda_1 v_1 \circ u + \lambda_2 v_2 \circ u = \lambda_1 u \circ v_1 + \lambda_2 u \circ v_2 = u \circ (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2),$$

Ainsi, $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, ce qui entraîne que $\dim \mathcal{C}(u) \leq \dim \mathcal{L}(E) = n^2$.

- b. Soit une homothétie $u = \lambda \text{Id}_E$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. On a déjà $\mathcal{C}(u) \subset \mathcal{L}(E)$. Par ailleurs, pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$, on a

$$v \circ u = v \circ \lambda \text{Id}_E = \lambda v = \lambda \text{Id}_E \circ v = u \circ v$$

donc $v \in \mathcal{C}(u)$ ce qui justifie $\mathcal{L}(E) \subset \mathcal{C}(u)$, donc $\mathcal{C}(u) = \mathcal{L}(E)$. Ainsi, $\dim \mathcal{C}(u) = \dim \mathcal{L}(E) = n^2$.

2. a. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la famille $(e_i, u(e_i))$ est liée donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tel que $\lambda u(e_i) + \mu e_i = 0_E$.
Si $\lambda = 0$ alors $\mu e_i = 0_E$, puis $\mu = 0$ car $e_i \neq 0_E$, ce qui est impossible. Ainsi, $u(e_i) = \lambda_i e_i$ en posant $\lambda_i = -\frac{\mu}{\lambda}$.
- b. Soit $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$. La famille $(u(e_1 + e_i), e_1 + e_i)$ étant liée, on montre comme ci-dessus qu'il existe un réel λ tel que $u(e_1 + e_i) = \lambda(e_1 + e_i)$, car le vecteur $e_1 + e_i$ n'est pas nul. On a ainsi

$$\lambda(e_1 + e_i) = u(e_1 + e_i) = u(e_1) + u(e_i) = \lambda_1 e_1 + \lambda_i e_i.$$

Par conséquent, $(\lambda - \lambda_1)e_1 + (\lambda - \lambda_i)e_i = 0_E$, et par liberté de la famille (e_1, e_i) , on obtient $\lambda - \lambda_1 = \lambda - \lambda_i = 0$, ce qui donne $\lambda_1 = \lambda = \lambda_i$.

- c. On note $\lambda = \lambda_1 = \dots = \lambda_n$. Pour tout $x \in E$, on peut écrire $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$, avec $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u(e_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda e_i = \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = \lambda x.$$

Par conséquent, $u = \lambda \text{Id}_E$.

3. On suppose $\dim \mathcal{C}(u) = n^2$. Comme $\mathcal{C}(u) \subset \mathcal{L}(E)$ et $\dim \mathcal{L}(E) = n^2$, on a $\mathcal{C}(u) = \mathcal{L}(E)$, c'est-à-dire que tout endomorphisme de E commute avec u .

Soit $x \in E$ non nul. On considère un projecteur p sur $\text{Vect}(x)$, parallèlement à un supplémentaire de $\text{Vect}(x)$. Comme $u \circ p = p \circ u$ et $p(x) = x$, on a

$$u(x) = u(p(x)) = p(u(x)) \in \text{Vect}(x),$$

donc la famille $(x, u(x))$ est liée. Si $x = 0_E$, la famille $(x, u(x))$ étant également liée, la question précédente entraîne que u est une homothétie.

4. a. Comme u n'est pas une homothétie, la question 2 entraîne (par contraposée) qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, u(x))$ est libre. Comme $\dim E = 2$, la famille $\mathcal{B} = (x, u(x))$ est libre et de bon cardinal, c'est une base de E . Par ailleurs, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est de la forme :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u(x) & u(u(x)) \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ u(x) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad \text{où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- b. Si $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}(A) &\Leftrightarrow AM = MA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y & \alpha x + \beta y \\ t & \alpha z + \beta t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z & \alpha t \\ x + \beta z & y + \beta t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \alpha z \\ t = x + \beta z \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \mathcal{C}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x & \alpha z \\ z & x + \beta z \end{pmatrix}, x, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}, x, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}(I_2, A)$$

- c. Si $v \in \mathcal{L}(E)$, on note B sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. On a alors

$$v \in \mathcal{C}(u) \Leftrightarrow u \circ v = v \circ u \Leftrightarrow AB = BA \Leftrightarrow B \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow B \in \text{Vect}(I_2, A) \Leftrightarrow v \in \text{Vect}(\text{Id}_E, u)$$

car $B = \lambda I_2 + \mu A$ si et seulement si $v = \lambda \text{Id}_E + \mu u$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Ainsi, $\mathcal{C}(u) = \text{Vect}(\text{Id}_E, u)$. Comme Id_E et u ne sont pas colinéaires, (Id_E, u) est libre et génératrice de $\mathcal{C}(u)$, donc $\dim \mathcal{C}(u) = 2$.

N.B. : on pouvait aussi remarquer que $\Phi : \begin{matrix} \mathcal{C}(u) & \rightarrow & \mathcal{C}(A) \\ v & \mapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) \end{matrix}$ est un isomorphisme.

5. a. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B . Puisque B n'est pas de la forme λI_n , u n'est pas une homothétie. On déduit de la question 2 qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $(x, u(x))$ est une famille libre. On peut donc compléter cette famille en une base $\mathcal{B} = (x, u(x), e_3, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

Ainsi, dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de u s'écrit :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u(x) & u(u(x)) & u(e_3) & \dots & u(e_n) \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ u(x) \\ e_3 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Ainsi, B et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ représentent toutes deux l'endomorphisme u , donc elles sont semblables, ce qui conclut.

Le même travail peut être mené pour la matrice $A^\top$, qui n'est pas colinéaire à I_n puisque A ne l'est pas. Ainsi, $A^\top$ est donc semblable à une matrice $\tilde{A}$ de la même forme que ci-dessus. Soit $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^\top = P\tilde{A}P^{-1}$. On a alors

$$A = (P\tilde{A}P^{-1})^\top = (P^\top)^{-1}\tilde{A}^\top P^\top$$

donc A est semblable à la matrice $A' = \tilde{A}^\top$, qui est de la forme souhaitée.

- b. Par la question précédente, on sait qu'il existe $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PA'P^{-1}$ et $B = QB'Q^{-1}$. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a alors

$$AM = MB \Leftrightarrow PA'P^{-1}M = MQB'Q^{-1} \Leftrightarrow A'P^{-1}M = P^{-1}MQB'Q^{-1} \Leftrightarrow A'P^{-1}MQ = P^{-1}MQB'.$$

Ainsi, $M \in \mathcal{F}$ si et seulement si $P^{-1}MQ \in \mathcal{F}'$. L'application

$$\Psi : \begin{matrix} \mathcal{F} & \rightarrow & \mathcal{F}' \\ M & \mapsto & P^{-1}MQ \end{matrix}$$

est clairement linéaire et bijective, donc un isomorphisme.

c. On considère une matrice comme dans l'énoncé :

$$M = \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & \beta & & & L \\ \hline 0 & & & & \\ \vdots & C & & & 0 \\ 0 & & & & \end{array} \right]$$

La deuxième colonne de A' s'écrit $\begin{bmatrix} 1 \\ C_2 \end{bmatrix}$, où $C_2 \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$. Un produit matriciel donne alors

$$A'M = MB' \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|ccc} \alpha & \beta & L & & \\ \hline \alpha C_2 & & & & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \hline \beta & & & & \\ \hline C & & & & \end{array} \right]$$

On en déduit que si $M \in \mathcal{F}'$, alors $\alpha = \beta = 0$, et L est nulle. Ensuite, comme αC_2 est nulle, C l'est également. Finalement, M est la matrice nulle. Ceci montre que si M est non nulle et de la forme de l'énoncé, alors $M \notin \mathcal{F}'$.

d. Si on note $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices de la forme de l'énoncé, alors

$$\mathcal{M} = \text{Vect}(\underbrace{E_{2,1}, E_{2,2}, \dots, E_{2,n}}_{\text{pour la ligne 2}}, \underbrace{E_{3,2}, \dots, E_{n,2}}_{\text{pour } C}).$$

Ainsi, $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n + n - 2 = 2n - 2$.

Par la question précédente, on a $\mathcal{F}' \cap \mathcal{M} = \{0\}$, donc $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{M}$ sont en somme directe. Comme $\dim \mathcal{F}' \oplus \mathcal{M} \leq \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\dim \mathcal{F}' + \dim \mathcal{M} \leq n^2, \quad \text{donc} \quad \dim \mathcal{F}' \leq n^2 - (2n - 2).$$

6. Comme u n'est une homothétie, sa matrice A dans une base $\mathcal{B}$ de E n'est pas colinéaire à I_n . Comme on l'a remarqué plus haut

$$\begin{array}{ccc} \Phi: \mathcal{C}(u) & \rightarrow & \mathcal{C}(A) \\ v & \mapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) \end{array}$$

est un isomorphisme, ce qui assure que $\dim \mathcal{C}(u) = \dim \mathcal{C}(A)$.

En choisissant $B = A$ dans la question précédente, on a $\mathcal{C}(A) = \mathcal{F}$. Comme par ailleurs $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont isomorphes, le résultat de la question précédente donne alors $\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{F} = \dim \mathcal{F}' \leq n^2 - (2n - 2) = (n - 1)^2 + 1$. Ainsi,

$$\dim \mathcal{C}(u) = \dim \mathcal{C}(A) \leq (n - 1)^2 + 1.$$

Exercice bonus – Lemme de Schur

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{L}(E)$ telle que les seuls sous-espaces stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ soient $\{0_E\}$ ou E .

1. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dans cette question. Montrer que les seuls endomorphismes $u \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont les homothéties.
2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, donner une condition suffisante sur $\dim E$ pour que le résultat reste vrai.
3. Montrer que le résultat est faux en toute généralité si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1. Supposons que $u \in \mathcal{L}(E)$ commute avec tous les éléments de $\mathcal{A}$. L'endomorphisme u admet au moins une valeur propre λ car $\mathbb{C}$ est algébriquement clos. Ainsi, comme $uv = vu$ pour tout $v \in \mathcal{A}$, on sait que $E_\lambda(u)$ est stable par v pour tout $v \in \mathcal{A}$. D'après l'hypothèse, comme $E_\lambda(u) \neq \{0_E\}$, on a $E_\lambda(u) = E$, ce qui entraîne que u est une homothétie.
2. Si E est de dimension impaire, alors χ_u a au moins une racine réelle, donc u a une valeur propre, et on peut reprendre le raisonnement précédent.
3. On peut prendre l'exemple $\mathcal{A}$ des rotations du plan, c'est-à-dire les endomorphismes r_θ de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans

la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \text{où } \theta \in \mathbb{R}.$$

En effet, aucune droite du plan n'est stable par toutes les rotations, donc $\mathcal{A}$ satisfait aux conditions de l'énoncé. Par ailleurs, les éléments de $\mathcal{A}$ commutent avec tous les autres éléments de $\mathcal{A}$, en particulier, $r_{\frac{\pi}{2}}$ commute avec tous les éléments de $\mathcal{A}$, mais n'est pas une homothétie.