

DM 4

On s'intéresse dans ce problème, à travers divers exemples, à quelques méthodes pour prouver que deux matrices sont semblables.

Partie I – Etude de quelques exemples

- Justifier que deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ont même trace, même déterminant, même rang et même polynôme caractéristique.
- On se donne deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comparer la trace, le déterminant, le rang et le polynôme caractéristique des matrices A et B .

Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ? Sont-elles semblables ? Ont-elles le même polynôme minimal ?

- On se donne deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Etablir que A et B sont semblables par les deux méthodes suivantes :

- en utilisant l'endomorphisme u associé à A dans une base (e_1, e_2, e_3) d'un espace vectoriel E et en cherchant, sans calculs, une nouvelle base de E ;
- en prouvant que le polynôme $X^3 - 3X - 1$ admet trois racines réelles distinctes (que l'on ne cherchera pas à déterminer) notées α, β et γ .

- Démontrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 est semblable à une matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

- Application.* Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{rg } u = 1$ et $u^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Démontrer que u est diagonalisable.
On pourra calculer U^2 .

- Démontrer qu'une matrice symétrique à coefficients complexes n'est pas nécessairement diagonalisable.

- On se donne

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

où α et β sont deux nombres complexes non nuls, différents et non opposés.

- Déterminer le rang de la matrice A et en déduire que 0 est valeur propre de A .
- Justifier que $2(\alpha + \beta)$ et $2(\alpha - \beta)$ sont aussi valeurs propres de A .
- Préciser une base de vecteurs propres de A .

Dans cette question, il est déconseillé de calculer le polynôme caractéristique de A .

- Démontrer que quels que soient les réels non nuls a et b et le réel λ , les matrices

$$\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

sont semblables.

Partie II – Démonstration d'un résultat

On se propose de démontrer que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe une matrice P inversible à coefficients complexes telle que $B = P^{-1}AP$. Écrivons $P = R + iS$ où R et S sont deux matrices à coefficients réels.

9. Démontrer que $RB = AR$ et $SB = AS$.

10. Justifier que la fonction $x \mapsto \det(R + xS)$ est une fonction polynomiale non identiquement nulle et en déduire qu'il existe un réel x tel que la matrice $R + xS$ soit inversible.

11. Conclure que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

12. *Application.* Démontrer que toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique $X^3 + X$ est semblable à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Partie III – Polynôme caractéristique et polynôme minimal

On s'intéresse dans cette partie à la proposition $\mathcal{P}_n$:

Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant à la fois le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

13. En étudiant les différentes valeurs possibles pour le polynôme caractéristique et le même polynôme minimal, démontrer que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n = 2$.

On admet qu'elle l'est également pour $n = 3$.

14. Démontrer que la proposition $\mathcal{P}_n$ est fausse pour $n = 4$. On pourra fournir deux matrices composées uniquement de 0 et de 1.

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, supposons qu'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$, alors $\text{tr}(A) = \text{tr}(P^{-1}PB) = \text{tr}(B)$ car $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Et $\det A = \det(P^{-1}PB) = \det(B)$ car $\det(AB) = \det(BA)$.

$\chi_A = \det(XI_n - PBP^{-1}) = \det P \det(XI_n - B) \det(P^{-1}) = \det(XI_n - B) = \chi_B$ car $\det(AB) = \det(B) \det(A)$.

On sait qu'un automorphisme transforme un sous espace en un autre de même dimension, alors $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$.

2. $\text{tr}(A) = \text{tr}(B) = 5$, et $\det(A) = \det(B) = 4 \neq 0$, donc $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = 3$ et enfin $\chi_A = \chi_B = (X - 1)(X - 2)^2$.

Il est simple de vérifier que

$$E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

donc A est diagonalisable et semblable à

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, $E_2(B) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, donc B est non diagonalisable.

Supposons que A et B sont semblables, alors B est semblable à la matrice diagonale D , donc est diagonalisable. Il y a contradiction, et A et B ne sont pas semblables. On a :

$$\begin{aligned} \pi_A &= (X - 1)(X - 2), \quad \text{car } A \text{ est diagonalisable,} \\ \pi_B &= (X - 1)(X - 2)^2, \quad \text{car } B \text{ est non diagonalisable.} \end{aligned}$$

Ainsi, $\pi_A \neq \pi_B$.

3. *Première méthode.* Cherchons une base $\mathcal{B}_1 = (v_1, v_2, v_3)$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u) = B$. On a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A$.

$$\text{Alors } \begin{cases} u(v_1) = v_2 + v_3 \\ u(v_2) = v_1 + 2v_3 \\ u(v_3) = v_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u(e_2) = e_1 + e_3 \\ u(e_1) = e_2 + 2e_3 \\ u(e_3) = e_1 \end{cases}$$

Il est clair que $(v_1, v_2, v_3) = (e_2, e_1, e_3)$ convient et c'est une base de $\mathbb{R}^3$, donc A et B sont semblables.

Deuxième méthode. Par un calcul simple $\chi_A = \chi_B = X^3 - 3X - 1$, qui est simplement scindé dans $\mathbb{R}$, donc ces deux matrices sont diagonalisables et semblables tous deux à même matrice diagonale, par transitivité A et B sont semblables.

4. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a $\text{rg}(u) = 1$ donc la dimension du noyau de u est $n - 1 \geq 1$, soit $(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ une base de ce noyau, et soit v_n un vecteur quelconque n'appartenant pas au noyau $\text{Ker}(u)$, alors $\mathcal{B}_1 = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ est une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme demandée.
5. Par la question 4. $u(v_n) = \sum_{i=1}^n a_i v_i$, donc $u^2(v_n) = \sum_{i=1}^n a_i u(v_i) = a_n u(v_n)$. Comme $\forall i \in \llbracket 1, (n-1) \rrbracket$, $u^2(v_i) = 0$ et $u^2 \neq 0$, on a $u^2(v_n) \neq 0$, donc $a_n \neq 0$.
Or $\chi_U = X^{n-1}(X - a_n)$, donc $\text{Sp}(U) = \{0, a_n\}$ et comme $\dim(E_0(u)) = \dim \text{Ker } u = (n-1)$, alors u est diagonalisable, car l'autre valeur propre est simple.

6. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique, $\chi - A = X^2 + 1$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$, donc A non diagonalisable.

7. Supposons que C_1, C_2, C_3, C_4 sont les colonnes de A ; on a $C_1 = C_3$ et $C_2 = C_4$, le rang de A est inférieur ou égal à 2.

Supposons que (C_1, C_2) est liée, comme $C_2 \neq 0$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, tels que $C_1 = \lambda C_2$, alors $\alpha = \lambda \beta$ donc $\beta = \lambda \alpha$, donc $\alpha(\lambda^2 - 1)$, comme $\alpha \neq 0$, donc $\lambda \in \{-1, 1\}$.

Si $\lambda = 1$, alors $\alpha = \beta$ ce qui est faux, et si $\lambda = -1$, alors $\alpha = -\beta$ ce qui est faux aussi, donc la famille (C_1, C_2) est libre. Alors $\text{rg}(A) = 2$, donc $\dim \text{Ker}(A) = 2 \neq 0$, alors 0 est une valeur propre de A .

Il est simple de vérifier que :

$$\text{Ker}(A - 2(\alpha + \beta)I_n) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Ker}(A - 2(\alpha - \beta)I_n) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{Ker}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

La somme de ces espaces est $\mathbb{C}^4$, car la somme de leurs dimensions est 4, donc

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de $\mathbb{C}^4$ formée de vecteurs propres de A .

8. On note A et B les matrices de l'énoncé. Si $a = b$, alors $A = B$ donc semblables.

Si $a \neq b$, soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est A . Cherchons une base $\mathcal{B}_1 = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de u est B . On a alors

$$\begin{cases} u(e_1) = \lambda e_1 \\ u(e_2) = a e_1 + \lambda e_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u(v_1) = \lambda v_1 \\ u(v_2) = b v_1 + \lambda v_2 \end{cases}$$

On prend $v_1 = e_1$ et on cherche $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $v_2 = x e_1 + y e_2$, ce qui donne $u(v_2) = (\lambda x + b) e_1 + \lambda y e_2$. Or on a par ailleurs

$$u(v_2) = x u(e_1) + y u(e_2) = (\lambda x + a) e_1 + \lambda y e_2.$$

Par conséquent, $ay = b$, et $y = \frac{b}{a}$ car $a \neq 0$. Réciproquement, $(e_1, \frac{b}{a} e_2)$ est bien une base car $b \neq 0$, et u a bien la matrice souhaitée dans cette base. Par conséquent, A et B sont semblables.

9. L'égalité $B = P^{-1}AP$ s'écrit aussi, $PB = AP$, alors $(R + iS)B = A(R + iS)$, alors $RB + iSB = AR + iAS$, comme les matrices RB, SB, AR et AS sont réelles, on a $RB = AR$ et $SB = AS$.

10. Si on pose $R = (r_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $S = (s_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors :

$\det(R + xS) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (r_{i,j} + x s_{i,j})$, or les quantités $r_{i,j} + x s_{i,j}$ sont des fonctions polynomiales de degré 1, donc $\prod_{i=1}^n (r_{i,j} + x s_{i,j})$ sont des fonctions polynomiales de degré n , alors $\det(R + xS)$ est une fonction polynomiale de degré $\leq n$, or $\det(R + iS) = \det(P) \neq 0$, donc non nul, alors possède un nombre fini de racines réelles, donc il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\det(R + x_0 S) \neq 0$, alors la matrice $(R + x_0 S)$ est inversible.

11. On a $RB = AR$ et $SB = AS$ alors $RB + x_0 SB = AR + x_0 AS$, donc $(R + x_0 S)B = A(R + x_0 S)$, or la matrice $(R + x_0 S)$ est inversible et réelle, donc les matrices A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

12. On a

$$\chi_B = X \det \begin{pmatrix} X & -1 \\ 1 & X \end{pmatrix} = X(X^2 + 1) = X^3 + X = \chi_A$$

qui est simplement scindé dans $\mathbb{C}$ de racines 0, i, -i, donc ces deux matrices sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ à $\text{diag}(0, i, -i)$, donc elles sont semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et comme elles sont réelles, par application des questions précédentes, les matrices A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

13. – Si A est diagonalisable, comme $\pi_A = \pi_B$, alors π_B est scindé à racines simples, donc B aussi.

$\chi_A = \chi_B$, donc A et B sont semblables à la même matrice diagonale, par conséquent elles sont semblables.

– Si A n'est pas diagonalisable, alors A possède une seule valeur propre notée α qui est aussi la seule valeur propre de B car $\chi_A = \chi_B$, alors $\pi_A = \pi_B = (X - \alpha)^2$.

Ces deux matrices sont trigonalisables car leurs polynômes caractéristiques sont scindés $= (X - \alpha)^2$, donc

A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & a \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, B est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & b \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

On a $a \neq 0$, sinon A est diagonalisable, et de même $b \neq 0$. Ainsi, par la question 8., A et B sont semblables.

14. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- $A \neq 0$; $B \neq 0$; calcul par blocs donne $A^2 = B^2 = 0$, donc $\pi_A = \pi_B = X^2$ et on $\chi_A = \chi_B = X^4$.
- Mais $\text{rg}(A) = 1$ et $\text{rg}(B) = 2$ d'après la question 1., ces deux matrices ne sont pas semblables.