

DM 3

pour le 05.10.2026

Exercice. Normes sur $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$

On munit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ d'une part de la norme $\|\cdot\|_\infty$, d'autre part de la norme N donnée par :

$$\forall f \in E, N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'|.$$

1. Vérifier que N est bien une norme.
2. Montrer que pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq N(f)$.
3. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ et N ne sont pas équivalentes.

On pourra introduire la suite de fonctions (f_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : x \mapsto \sin(nx)$.

Problème. Étude d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, et A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A .

On note $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et I_n la matrice identité.

On note φ_A l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\varphi_A(M) = AM - MA$$

Les parties III et IV sont indépendantes entre elles, et indépendantes des parties I et II du DS 2.

Partie III. Étude des vecteurs propres de φ_A associés à la valeur propre 0

Soit m le degré du polynôme minimal de A .

8. Démontrer que la famille $(I_n, A, \dots, A^{m-1})$ est une base de $\mathbb{R}[A]$.
9. Vérifier que $\mathbb{R}[A]$ est inclus dans $\ker \varphi_A$ et en déduire une minoration de $\dim \ker \varphi_A$.
10. Un cas d'égalité

On suppose que l'endomorphisme u (défini au début du problème) est nilpotent d'indice n (c'est-à-dire que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$). On considère un vecteur y de $\mathbb{R}^n$ tel que $u^{n-1}(y) \neq 0$ et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on pose $e_i = u^{n-i}(y)$.

- a. Démontrer que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
- b. Soient $B \in \ker \varphi_A$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B .

Démontrer que si $v(y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ ($\alpha_i \in \mathbb{R}$) alors $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}$.

- c. En déduire $\ker \varphi_A$.

11. Cas où u est diagonalisable

On suppose que u est diagonalisable. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ($1 \leq p \leq n$) les p valeurs propres distinctes de u et, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, $E_u(\lambda_k)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k . On note m_k la dimension de cet espace propre.

- a. Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B .

Démontrer que $B \in \ker \varphi_A$ si et seulement si, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, $E_u(\lambda_k)$ est stable par v (c'est-à-dire $v(E_u(\lambda_k)) \subset E_u(\lambda_k)$).

- b. En déduire que $B \in \ker \varphi_A$ si et seulement si la matrice de v , dans une base adaptée à la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe des sous-espaces propres de u , a une forme que l'on précisera.
- c. Préciser la dimension de $\ker \varphi_A$.

Partie IV. – Étude des vecteurs propres de φ_A associés à une valeur propre non nulle

Dans cette partie, α est une valeur propre non nulle de φ_A et B un vecteur propre associé ($B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \neq 0$). On note π_B le polynôme minimal de B et d le degré de π_B .

- 12. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_A(B^k) = \alpha k B^k$.
 - 13. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer $\varphi_A(P(B))$ en fonction de α , B et $P'(B)$.
 - 14. Démontrer que le polynôme $X\pi'_B - d\pi_B$ est le polynôme nul (π'_B étant le polynôme dérivé du polynôme minimal de la matrice B).
 - 15. En déduire que $B^d = 0$.
-