

DM 3

Exercice. Normes sur $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$

On munit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ d'une part de la norme $\|\cdot\|_\infty$, d'autre part de la norme N donnée par :

$$\forall f \in E, N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'|.$$

1. Vérifier que N est bien une norme.
2. Montrer que pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq N(f)$.
3. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ et N ne sont pas équivalentes.

On pourra introduire la suite de fonctions (f_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : x \mapsto \sin(nx)$.

1. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont immédiates.

Pour la séparation, soit $f \in E$ telle que $N(f) = 0 = |f(0)| + \int_0^1 |f'|$. Les deux termes du membre de droite étant positifs, ils sont nuls. Comme $|f'|$ est positive, continue et d'intégrale nulle, elle est nulle, donc f est constante sur $[0, 1]$ et comme $f(0) = 0$, f est nulle.

2. Pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = f(0) + \int_0^x f'$ donc

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \int_0^x |f'| \leq |f(0)| + \int_0^1 |f'| = N(f).$$

On passe ensuite à la borne supérieure pour $x \in [0, 1]$ pour obtenir $\|f\|_\infty \leq N(f)$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty \leq 1$ et

$$N(f_n) = n \int_0^1 |\cos(nt)| dt \stackrel{u=nt}{=} \int_0^n |\cos u| du \geq \int_0^n \cos^2 u du = \frac{1}{2} \int_0^n (1 + \cos 2u) du = \frac{n}{2} + \frac{\sin 2n}{4}.$$

Ainsi, $N(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc (f_n) est bornée pour $\|\cdot\|_\infty$, mais diverge pour N , les normes ne sont pas équivalentes.

Plus précisément, il n'existe pas de réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $f \in E$, $\alpha N(f) \leq \|f\|_\infty$.

Problème. Étude d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, et A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A .

On note $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et I_n la matrice identité.

On note φ_A l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\varphi_A(M) = AM - MA$$

Les parties III et IV sont indépendantes entre elles, et indépendantes des parties I et II du DS 2.

Partie III. Étude des vecteurs propres de φ_A associés à la valeur propre 0

Soit m le degré du polynôme minimal de A .

8. Démontrer que la famille $(I_n, A, \dots, A^{m-1})$ est une base de $\mathbb{R}[A]$.
9. Vérifier que $\mathbb{R}[A]$ est inclus dans $\ker \varphi_A$ et en déduire une minoration de $\dim \ker \varphi_A$.
10. Un cas d'égalité

On suppose que l'endomorphisme u (défini au début du problème) est nilpotent d'indice n (c'est-à-dire que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$). On considère un vecteur y de $\mathbb{R}^n$ tel que $u^{n-1}(y) \neq 0$ et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on pose $e_i = u^{n-i}(y)$.

a. Démontrer que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

b. Soient $B \in \ker \varphi_A$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B .

Démontrer que si $v(y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ ($\alpha_i \in \mathbb{R}$) alors $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}$.

c. En déduire $\ker \varphi_A$.

11. Cas où u est diagonalisable

On suppose que u est diagonalisable. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ($1 \leq p \leq n$) les p valeurs propres distinctes de u et, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, $E_u(\lambda_k)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k . On note m_k la dimension de cet espace propre.

a. Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B .

Démontrer que $B \in \ker \varphi_A$ si et seulement si, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, $E_u(\lambda_k)$ est stable par v (c'est-à-dire $v(E_u(\lambda_k)) \subset E_u(\lambda_k)$).

b. En déduire que $B \in \ker \varphi_A$ si et seulement si la matrice de v , dans une base adaptée à la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe des sous-espaces propres de u , a une forme que l'on précisera.

c. Préciser la dimension de $\ker \varphi_A$.

Partie IV. – Étude des vecteurs propres de φ_A associés à une valeur propre non nulle

Dans cette partie, α est une valeur propre non nulle de φ_A et B un vecteur propre associé ($B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \neq 0$). On note π_B le polynôme minimal de B et d le degré de π_B .

12. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_A(B^k) = \alpha k B^k$.

13. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer $\varphi_A(P(B))$ en fonction de α , B et $P'(B)$.

14. Démontrer que le polynôme $X\pi'_B - d\pi_B$ est le polynôme nul (π'_B étant le polynôme dérivé du polynôme minimal de la matrice B).

15. En déduire que $B^d = 0$.

8. Il est clair que $\varphi_A(A^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc $\text{Vect}(I, A, \dots, A^{m-1}) \subset \mathbb{R}[A]$. Soit maintenant P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, alors il existe Q et R des polynômes tels que :

$$P = Q\pi_A + R$$

avec $R = 0$ ou $\deg R < m$. Donc $P(A) = R(A) \in \text{Vect}(I, A, \dots, A^{m-1})$, d'où l'égalité.

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ des scalaires tels que $\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i A^i = 0$, si l'un des α_i est non nul, le polynôme $\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i X^i$ contredit la définition du polynôme minimal de A , donc nécessairement $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{m-1} = 0$ et donc la famille $(I, A, \dots, A^{m-1})$ est base de $\mathbb{R}[A]$.

9. Il est clair que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $\varphi_A(P(A)) = 0$ et donc $\mathbb{R}[A] \subset \ker(\varphi_A)$ et par conséquent $\dim \ker(\varphi_A) \geq \dim \mathbb{R}[A] = m$.

10. a. Soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ des scalaires tels que (*) $\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i e_i = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i u^{n-i}(y) = 0$, si on applique u^{n-1} , l'égalité (*) devient $\alpha_0 u^{n-1}(y) = 0$ et donc $\alpha_0 = 0$, on applique une autre fois u^{n-2} à (*) on obtient $\alpha_1 = 0$ et par le même raisonnement, on appliquant à chaque fois u^{n-i} ($0 \leq i \leq m-1$), on obtient $\alpha_i = 0$ pour tout i . La famille est donc bien libre.

b. Posons $w = \sum_{i=1}^m \alpha_i u^{n-i}$. Puisque $(y, u(y), \dots, u^{n-1}(y))$ est une base de $\mathbb{R}^n$, il suffit donc de montrer que

$$v(u^i(y)) = w(u^i(y)),$$

pour tout $i = 0, 1, \dots, n-1$.

On a déjà $v(y) = w(y)$. Comme v et w commutent avec u ($B \in \ker(\varphi_A)$), alors ils commutent avec tous les u^i , $i \in \mathbb{N}$. Donc

$$v(u^i(y)) = u^i(v(y)) = u^i(w(y)) = w(u^i(y)),$$

et par conséquent $v = w = \sum_{i=1}^m \alpha_i u^{n-i}$.

c. Il est évident que $\text{Vect}\{I, A, \dots, A^{n-1}\} \subset \ker(\varphi_A)$. Soit $B \in \ker(\varphi_A)$ et v l'endomorphisme canoniquement associé à B , alors il existe des scalaires $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ (les composantes de $v(y)$ dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$)

tels que $v(y) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^{n-i}(y)$, et donc, d'après la question 10.(b), $v = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^{n-i}$.
Matriciellement, $B = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i A^{n-i} \in \text{Vect} \{I_n, A, \dots, A^{n-1}\}$ et par conséquent :

$$\ker \varphi_A = \text{Vect} \{I_n, A, \dots, A^{n-1}\}.$$

11. a. $B \in \ker \varphi_A$ si et seulement si u et v commutent. Soit $1 \leq k \leq p$ et $x \in E_u(\lambda_k)$, alors $u(x) = \lambda_k x$ et donc

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda_k x) = \lambda_k v(x),$$

donc $v(x) \in E_u(\lambda_k)$, d'où $v(E_u(\lambda_k)) \subset E_u(\lambda_k)$.

Inversement, puisque u est diagonalisable, on a $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{k=1}^p E_u(\lambda_k)$. Pour montrer que $uv = vu$, il suffit de montrer que pour tout $1 \leq k \leq p$, $\forall x \in E_u(\lambda_k)$, $uv(x) = vu(x)$. On a

$$\forall x \in E_u(\lambda_k), \quad vu(x) = v(\lambda_k x) = \lambda_k v(x) = uv(x).$$

D'où le résultat.

- b. Soit $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_p)$ une base adaptée à la décomposition précédente, la matrice de v est donc de la forme :

$$M(v, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} B_1 & O & \cdots & O \\ O & B_2 & \cdots & O \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & B_p \end{pmatrix}$$

avec $B_k = \text{Mat}_{\mathcal{B}_k} (v_{E_{\lambda_k}(u)})$.

Inversement, toutes les matrices de type sont dans $\ker(\varphi_A)$ (d'après l'équivalence démontrée dans la question 11.a).

- c. Soit $B \in \ker(\varphi_A)$. Notons u_k (resp. v_k) l'endomorphisme de $E_u(\lambda_k)$ induit par u (resp. v). D'après ce qui précède $vu = uv$ si et seulement si pour tout $k = 1, 2, \dots, p$, $v_k u_k = u_k v_k$.

Mais $u_k = \lambda_k \text{Id}_{E_u(\lambda_k)}$, alors tout élément de $\mathcal{L}(E_u(\lambda_k))$ commute avec u_k , soit donc φ l'application de $\ker(\varphi_A)$ dans $\prod_{k=1}^p \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\varphi(B) = (B_1, B_2, \dots, B_p)$$

On vérifie facilement que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, donc

$$\dim \ker(\varphi_A) = \sum_{k=1}^p \dim \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{R}) = \sum_{k=1}^p m_k^2.$$

12. On a : $\varphi_A(I_n) = 0$ et puisque B est vecteur propre de φ_A associé à α , $\varphi_A(B) = AB - BA = \alpha B$, donc la propriété $p(k) : \varphi_A(B^k) = \alpha k B^k$ est vraie pour $k = 0$ et $k = 1$, supposons qu'elle est vraie à l'ordre k . On a :

$$\begin{aligned} AB^{k+1} - B^{k+1}A &= (AB^k - B^k A)B + B^k(AB - BA) \\ &= \alpha k B^k B + B^k \alpha B \\ &= \alpha(k+1)B^k. \end{aligned}$$

Ainsi, par le principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_A(B^k) = \alpha k B^k$.

13. Posons $P(B) = \sum_{k=0}^m \alpha_k B^k$. Par linéarité de φ_A et le résultat démontré dans la question 12, on a :

$$\begin{aligned} \varphi_A(P(B)) &= \sum_{k=0}^m \alpha_k \varphi_A(B^k) \\ &= \alpha \sum_{k=1}^m \alpha_k k B^k \\ &= \alpha \sum_{k=1}^m k B^{k-1} = \alpha P'(B)B. \end{aligned}$$

14. On a $\pi_B(B) = 0$ et donc $0 = \varphi_A(\pi(B)) = \alpha \pi'_B(B)B$, donc le polynôme $X\pi'_B - d\pi_B$ est un polynôme annulateur de B et de degré est strictement inférieure à $\deg \pi_B$, donc il est nul.

15. D'après la question 14., on a : $X\pi'_B = d\pi_B$ donc X divise π_B . On reprend le même raisonnement mais cette fois avec le polynôme $X\pi'_B$ au lieu de π_B , on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi_A((X\pi'_B)(B)) = \alpha(X\pi'_B)'(B)B \\ &= \alpha\pi'(B)B + \alpha B\pi''_B(B)B \\ &= \alpha B^2\pi''_B(B) \end{aligned}$$

On montre ensuite que $X^2\pi''_B - d(d-1)\pi_B$ est le polynôme nul, donc X^2 divise π_B . Un raisonnement par récurrence descendant, montre que X^d divise π_B , et par unicité du polynôme minimal, $\pi_B = X^d$ et donc $B^d = 0$.