

DM 2

pour le 21.09.2026

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E . On souhaite étudier les sous-espaces stables de f .

Partie I – Endomorphisme diagonalisable

Dans cette partie on suppose que f est diagonalisable. On désigne par k le cardinal du spectre de f et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ses valeurs propres distinctes ainsi que $E_1, \dots, E_k$ les sous-espaces propres associés.

1. Que dire de f si $k = 1$? En déduire les sous-espaces vectoriels de E stables par f .

On suppose par la suite que $k \geq 2$.

2. Soient $F_1, \dots, F_k$ des sous-espaces vectoriels respectifs de $E_1, \dots, E_k$.
 - a. Justifier que les sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_k$ sont en somme directe.
 - b. Montrer que $F = \bigoplus_{i=1}^k F_i$ est un sous-espace vectoriel stable par f .
3. On s'intéresse à la réciproque. On considère un sous-espace vectoriel F stable par f , et on cherche à montrer que

$$F = \bigoplus_{i=1}^k F_i, \quad \text{où } \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \quad F_i = F \cap E_i.$$

- a. Donner un exemple de trois espaces vectoriels A, B et C de E tels que $A \oplus B = E$ et $(A \cap C) \oplus (B \cap C) \neq C$.
On pourra se placer dans le cas où $E = \mathbb{K}^2$.
- b. Justifier que pour tout $x \in F$, il existe $(x_1, \dots, x_k) \in E_1 \times \dots \times E_k$ tel que $x = x_1 + \dots + x_k$.
- c. Montrer le résultat dans le cas où $k = 2$.
- d. En déduire le cas général.
4. En déduire que l'endomorphisme f_F induit par f sur F est diagonalisable.

Partie II – Endomorphisme nilpotent

5. On suppose dans cette question que $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et on note ψ l'endomorphisme de dérivation $\psi : P \mapsto P'$.
 - a. Écrire la matrice de ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
 - b. Montrer que pour tout $k \leq n-1$, le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_k[X]$ est stable par ψ .
 - c. Montrer réciproquement que si F est un sous-espace stable par ψ tel que $F \neq \{0\}$, alors il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $F = \mathbb{R}_k[X]$.
On pourra considérer un polynôme de degré maximal dans F .
6. Soit f un endomorphisme nilpotent d'ordre n . C'est-à-dire que l'on suppose que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.
 - a. Soit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que $\mathcal{B} = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E .
 - b. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (e'_0, \dots, e'_{n-1})$ de E telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & n-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- c. On considère l'application linéaire $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}_{n-1}[X]$ définie par : $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \Phi(e'_i) = X^i$. Justifier que Φ est un isomorphisme, et montrer que

$$\Phi \circ f = \psi \circ \Phi.$$
- d. Déduire de la question précédente et de la question 5 tous les sous-espaces stables par f .