

DM 2

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E . On souhaite étudier les sous-espaces stables de f .

Partie I – Endomorphisme diagonalisable

Dans cette partie on suppose que f est diagonalisable. On désigne par k le cardinal du spectre de f et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ses valeurs propres distinctes ainsi que $E_1, \dots, E_k$ les sous-espaces propres associés.

1. Que dire de f si $k = 1$? En déduire les sous-espaces vectoriels de E stables par f .

On suppose par la suite que $k \geq 2$.

2. Soient $F_1, \dots, F_k$ des sous-espaces vectoriels respectifs de $E_1, \dots, E_k$.
 - a. Justifier que les sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_k$ sont en somme directe.
 - b. Montrer que $F = \bigoplus_{i=1}^k F_i$ est un sous-espace vectoriel stable par f .
3. On s'intéresse à la réciproque. On considère un sous-espace vectoriel F stable par f , et on cherche à montrer que

$$F = \bigoplus_{i=1}^k F_i, \quad \text{où } \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \quad F_i = F \cap E_i.$$

- a. Donner un exemple de trois espaces vectoriels A, B et C de E tels que $A \oplus B = E$ et $(A \cap C) \oplus (B \cap C) \neq C$.
On pourra se placer dans le cas où $E = \mathbb{K}^2$.
- b. Justifier que pour tout $x \in F$, il existe $(x_1, \dots, x_k) \in E_1 \times \dots \times E_k$ tel que $x = x_1 + \dots + x_k$.
- c. Montrer le résultat dans le cas où $k = 2$.
- d. Montrer le cas général.
4. En déduire que l'endomorphisme f_F induit par f sur F est diagonalisable.

Partie II – Endomorphisme nilpotent

5. On suppose dans cette question que $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et on note ψ l'endomorphisme de dérivation $\psi : P \mapsto P'$.
 - a. Écrire la matrice de ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
 - b. Montrer que pour tout $k \leq n-1$, le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_k[X]$ est stable par ψ .
 - c. Montrer réciproquement que si F est un sous-espace stable par ψ tel que $F \neq \{0\}$, alors il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $F = \mathbb{R}_k[X]$.
On pourra considérer un polynôme de degré maximal dans F .
6. Soit f un endomorphisme nilpotent d'ordre n . C'est-à-dire que l'on suppose que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.
 - a. Soit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que $\mathcal{B} = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E .
 - b. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (e'_0, \dots, e'_{n-1})$ de E telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & n-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- c. On considère l'application linéaire $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}_{n-1}[X]$ définie par : $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \Phi(e'_i) = X^i$. Justifier que Φ est un isomorphisme, et montrer que

$$\Phi \circ f = \psi \circ \Phi.$$
- d. Déduire de la question précédente et de la question 5 tous les sous-espaces stables par f .

1. Si on suppose que $k = 1$ on a que E est un espace propre associé à une valeur propre λ pour f . De ce fait, f est l'homothétie de rapport λ . On en déduit que tous les sous-espaces vectoriels de E sont stables par f .

2. a. On se donne des sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_k$ tels que pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $F_i \subset E_i$. Montrons qu'ils sont en somme directe.

Soit $(u_1, \dots, u_k) \in F_1 \times \dots \times F_k$ tels que $u_1 + \dots + u_k = 0$. Comme pour chaque i , $u_i \in E_i$ et que les espaces propres E_i sont en somme directe, on en déduit que pour tout i , $u_i = 0$. Cela signifie que les espaces vectoriels F_i sont en somme directe.

- b. On pose $F = \bigoplus_{i=1}^k F_i$. Soit $x = \sum_{i=1}^k x_i$ un élément de F (où pour tout i , $x_i \in F_i$). Comme $F_i \subset E_i$ on a

$$f(x) = \sum_{i=1}^k f(x_i) = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \in \bigoplus_{i=1}^k F_i = F.$$

On a bien montré que F était stable par f .

3. On considère un sous-espace vectoriel F stable par f .

- a. Dans l'espace $E = \mathbb{K}^2$, on pose $A = \text{Vect}(u_1)$, $B = \text{Vect}(u_2)$ et $C = \text{Vect}(u_3)$ où $u_1 = (1, 0)$, $u_2 = (0, 1)$ et $u_3 = (1, 1)$. On a alors A et B qui sont en somme directe et $A \oplus B = E$ pour des raisons de dimension. Cependant, $A \cap C = B \cap C = \{0\}$ et donc

$$\{0\} = (A \cap C) \oplus (B \cap C) \neq E.$$

- b. Soit x un élément de F . Comme f est diagonalisable, $E = \bigoplus_{i=1}^k E_i$. De ce fait, on peut décomposer $x = \sum_{i=1}^k x_i$ où pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $x_i \in E_i$.

- c. Soit $x \in F$, on sait alors que x s'écrit $x = x_1 + x_2$, où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. Comme F est stable par f , on en déduit que F est stable par $f - \lambda_2 \text{Id}_E$. Or

$$(f - \lambda_2 \text{Id}_E)(x) = (\lambda_1 - \lambda_2)x_1$$

car $(f - \lambda_2 \text{Id}_E)(x_2) = 0_E$. On en déduit que $(\lambda_1 - \lambda_2)x_1 \in F$, puis $x_1 \in F$ car $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$. Par conséquent, $x_2 \in F$ également, ce qui montre que $x \in F_1 + F_2$. On a donc bien $F \subset F_1 + F_2$. L'autre inclusion est claire.

Comme $F_1 \subset E_1$ et $F_2 \subset E_2$, la somme est par ailleurs directe. Finalement, $F = F_1 \oplus F_2$.

- d. On procède comme dans la question précédente. Soit $x \in F$. On sait que x s'écrit $x = x_1 + \dots + x_k$, où $x_i \in E_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Comme F est stable par f , on en déduit que F est stable par $f - \lambda_i \text{Id}_E$ pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, donc par $(f - \lambda_2 \text{Id}_E) \circ \dots \circ (f - \lambda_k \text{Id}_E)$. Or,

$$(f - \lambda_2 \text{Id}_E) \circ \dots \circ (f - \lambda_k \text{Id}_E)(x) = \prod_{i=2}^k (\lambda_1 - \lambda_i)x_1$$

En effet, pour tout $i \in \llbracket 2, k \rrbracket$, $(f - \lambda_2 \text{Id}_E) \circ \dots \circ (f - \lambda_k \text{Id}_E)(x_i) = 0_E$ puisque $(f - \lambda_i \text{Id}_E)(x_i) = 0_E$.

Comme $\prod_{i=2}^k (\lambda_1 - \lambda_i) \neq 0$, on a $x_1 \in F$. En répétant l'opération, on obtient successivement $x_2 \in F, \dots, x_k \in F$.

Par conséquent, $x = x_1 + \dots + x_k \in F_1 + \dots + F_k$, donc $F = F_1 + \dots + F_k$.

Pour finir, comme $F_i \subset E_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, la somme $F_1 + \dots + F_k$ est directe.

4. On vient de voir que $F = \bigoplus_{i=1}^k F_i$. Maintenant, par définition, F_i est l'espace propre (éventuellement réduit à $\{0\}$) de f_F associé à la valeur propre λ_i donc f_F est diagonalisable.

5. On suppose dans cette question que $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et que ψ est l'endomorphisme de dérivation $\psi : P \mapsto P'$.

- a. La matrice de ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est donnée par

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & n-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- b. Soit k un entier inférieur à $n - 1$. Soit $P \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$, on a $\psi(P) = P'$ et $\deg(P') \leq \deg(P) \leq k - 1$. On a bien $\psi(P) \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$. Le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ est stable par ψ .

- c. Soit F un sous-espace vectoriel stable par ψ . On suppose que $F \neq \{0\}$. De ce fait l'ensemble $\{\deg(P), P \in F\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ majorée par $n-1$. On en déduit qu'elle admet un plus grand élément que nous noterons k . On a donc $F \subset \mathbb{R}_k[X]$.

Soit P un polynôme de F de degré k . Comme F est stable par ψ , on a $\psi^i(P) = P^{(i)} \in F$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Comme F est un sous-espace vectoriel, $\text{Vect}(P, P', \dots, P^{(k)}) \subset F$. Par ailleurs, la famille $(P, P', \dots, P^{(k)})$ est une famille de $\mathbb{R}_k[X]$ de polynômes non nuls, échelonnée en degré. Comme elle est de bon cardinal, c'est une base de $\mathbb{R}_k[X]$. Finalement, $\mathbb{R}_k[X] = \text{Vect}(P, P', \dots, P^{(k)}) \subset F$, donc $F = \mathbb{R}_k[X]$.

6. Soit f un endomorphisme nilpotent d'ordre n . C'est-à-dire que l'on suppose que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- a. Soit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que est une base de E . La famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ ayant n vecteurs et E étant de dimension n , il suffit de montrer qu'elle est libre pour montrer que c'est une base. Supposons par l'absurde qu'elle ne soit pas libre, il existe alors une relation de dépendance linéaire non triviale entre les vecteurs de la famille : $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x) = 0$. La famille $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$ n'étant pas nulle on note p le plus élément de $\llbracket 0; n-1 \rrbracket$ tel que $\lambda_k \neq 0$. En appliquant f^{n-1-p} on obtient

$$0 = f^{n-1-p} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x) \right) = \sum_{i=p}^{n-1} \lambda_i f^{n-1-p+i}(x) = \lambda_k f^{n-1}(x).$$

On en déduit que $\lambda_k = 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

- b. Par définition de la base $\mathcal{B}$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose $e'_i = i! f^{n-i}(x)$ pour $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. La famille $\mathcal{B}' = (e'_0, \dots, e'_{n-1})$ est une base de E car c'est la même famille que celle de la question précédente à l'ordre et à des facteurs multiplicatifs non nuls près.

On remarque alors que $f(e'_0) = f^n(x) = 0$ et que pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $f(e'_i) = i! f(f^{n-i}(x)) = i! f^{n-(i-1)}(x) = i e'_{i-1}$.

On en déduit que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & n-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- c. L'application linéaire Φ transforme la base $\mathcal{B}'$ en la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, c'est donc un isomorphisme.

Par ailleurs, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\Phi(f(e'_i)) = \Phi(i e'_{i-1}) = i X^{i-1}$, et $\psi(\Phi(e'_i)) = \psi(X^i) = i X^{i-1}$. Comme de plus $\Phi(f(e'_0)) = 0 = \psi(\Phi(e'_0))$, les applications linéaires $\Phi \circ f$ et $\pi \circ \Phi$ coïncident sur la base $\mathcal{B}'$, donc sont égales.

- d. On remarque d'après la question précédente que si F est un sous-espace vectoriel de E , alors F est stable par f si et seulement si $\Phi(F)$ est stable par ψ .

Or nous avons vu que les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ par ψ sont les sous-espaces vectoriels de la forme $\mathbb{R}_k[X]$ et l'espace nul. Ainsi, les seuls sous-espaces vectoriels stables par f sont l'espace nul et les $\Phi^{-1}(\mathbb{R}_k[X])$. Autrement dit, tous les espaces de la forme

$$F_k = \text{Vect}(u_0, \dots, u_k).$$