

DM 1

pour le 07.09.2026

Les parties I, II et III sont, dans une large mesure, indépendantes.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.

Partie I

On pose $A = (X + 1)^{2n} - 1 \in \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que :

$$\exists B \in \mathbb{R}[X], \quad A = XB.$$

On précisera le degré de B , ainsi que son coefficient dominant et son coefficient constant, qu'on notera b_0 .

2. Déterminer les racines de A dans $\mathbb{C}$. On posera $z_0 = 0$, et les autres racines $z_1, z_2, \dots, z_{2n-1}$ seront écrites sous forme trigonométrique.

On pose $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

3. Montrer que :

$$P_n = \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right).$$

En déduire que si $Q_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$, alors $P_n = \sqrt{Q_n}$.

4. En calculant de deux manières le produit $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$, en déduire les valeurs de Q_n puis de P_n .
5. On pose $F = \frac{1}{A} \in \mathbb{R}(X)$. Déterminer la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}(X)$.

Partie II

On travaille dans un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E différent de l'espace nul. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E , Id_E l'application identité de E , et $0_{\mathcal{L}(E)}$ l'endomorphisme nul de E . On rappelle que, par convention, $f^0 = \text{Id}_E$ pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$.

On étudie, sur quelques cas particuliers, l'équation :

$$(f + \text{Id}_E)^{2n} - \text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)},$$

d'inconnue $f \in \mathcal{L}(E)$.

Rappel : on appelle homothétie vectorielle de E tout endomorphisme h de E de la forme $h : x \mapsto \lambda x$, où $\lambda \in \mathbb{C}$.

6. Déterminer les homothéties vectorielles solutions de l'équation.
7. Déterminer les valeurs des sommes :

$$S = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \quad \text{et} \quad T = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}.$$

8. Si s est une symétrie vectorielle de E , exprimer $(s + \text{Id}_E)^{2n} - \text{Id}_E$ en fonction de s et de Id_E .
En déduire les symétries de E qui sont solutions de l'équation proposée.

Partie III

On travaille dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. On note I la matrice identité et 0 la matrice nulle de cet espace vectoriel. On pose :

$$G = \{M_{a,b} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}), a, b \in \mathbb{C}\}, \quad \text{où} \quad M_{a,b} = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}.$$

9. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ dont on précisera la dimension et une base. Vérifier que G est stable pour le produit matriciel.

On cherche à résoudre l'équation matricielle :

$$(M + I)^{2n} - I = 0 \tag{*}$$

d'inconnue $M \in G$. On note E le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E .

Soit $M = M_{a,b}$ un élément de E tel que $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ et u l'endomorphisme de E canoniquement associé à la matrice M .

10. Déterminer une base (ε_1) de $E_1 = \text{Ker}(u - (a + 2b)\text{Id}_E)$.
11. Déterminer une base $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $E_1 = \text{Ker}(u - (a - b)\text{Id}_E)$.
12. Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E . On la note $\mathcal{C}$ dans la suite.
13. Déterminer la matrice D de u dans la base $\mathcal{C}$.
14. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.
Expliciter la matrice P et calculer P^{-1} en précisant la méthode adoptée et en détaillant les calculs.
15. Exprimer M en fonction de P, D et P^{-1} .
16. Montrer que M est solution de $(*)$ si et seulement si D est solution de $(*)$.
17. Déterminer toutes les matrices D solutions de $(*)$.
18. Conclure quant à l'ensemble des solutions de $(*)$ dans G .