

DM 1

Les parties I, II et III sont, dans une large mesure, indépendantes.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.

Partie I

On pose $A = (X + 1)^{2n} - 1 \in \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que :

$$\exists B \in \mathbb{R}[X], \quad A = XB.$$

On précisera le degré de B , ainsi que son coefficient dominant et son coefficient constant, qu'on notera b_0 .

2. Déterminer les racines de A dans $\mathbb{C}$. On posera $z_0 = 0$, et les autres racines $z_1, z_2, \dots, z_{2n-1}$ seront écrites sous forme trigonométrique.

On pose $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

3. Montrer que :

$$P_n = \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right).$$

En déduire que si $Q_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$, alors $P_n = \sqrt{Q_n}$.

4. En calculant de deux manières le produit $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$, en déduire les valeurs de Q_n puis de P_n .

5. On pose $F = \frac{1}{A} \in \mathbb{R}(X)$. Déterminer la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}(X)$.

Partie II

On travaille dans un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E différent de l'espace nul. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E , Id_E l'application identité de E , et $0_{\mathcal{L}(E)}$ l'endomorphisme nul de E . On rappelle que, par convention, $f^0 = \text{Id}_E$ pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$.

On étudie, sur quelques cas particuliers, l'équation :

$$(f + \text{Id}_E)^{2n} - \text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)},$$

d'inconnue $f \in \mathcal{L}(E)$.

Rappel : on appelle homothétie vectorielle de E tout endomorphisme h de E de la forme $h : x \mapsto \lambda x$, où $\lambda \in \mathbb{C}$.

6. Déterminer les homothéties vectorielles solutions de l'équation.

7. Déterminer les valeurs des sommes :

$$S = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \quad \text{et} \quad T = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}.$$

8. Si s est une symétrie vectorielle de E , exprimer $(s + \text{Id}_E)^{2n} - \text{Id}_E$ en fonction de s et de Id_E .

En déduire les symétries de E qui sont solutions de l'équation proposée.

Partie III

On travaille dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. On note I la matrice identité et 0 la matrice nulle de cet espace vectoriel. On pose :

$$G = \{M_{a,b} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}), a, b \in \mathbb{C}\}, \quad \text{où} \quad M_{a,b} = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}.$$

9. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ dont on précisera la dimension et une base. Vérifier que G est stable pour le produit matriciel.

On cherche à résoudre l'équation matricielle :

$$(M + I)^{2n} - I = 0 \quad (\star)$$

d'inconnue $M \in G$. On note E le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E .

Soit $M = M_{a,b}$ un élément de E tel que $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ et u l'endomorphisme de E canoniquement associé à la matrice M .

10. Déterminer une base (ε_1) de $E_1 = \text{Ker}(u - (a + 2b)\text{Id}_E)$.
11. Déterminer une base $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $E_1 = \text{Ker}(u - (a - b)\text{Id}_E)$.
12. Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E . On la note $\mathcal{C}$ dans la suite.
13. Déterminer la matrice D de u dans la base $\mathcal{C}$.
14. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.
Expliciter la matrice P et calculer P^{-1} en précisant la méthode adoptée et en détaillant les calculs.
15. Exprimer M en fonction de P, D et P^{-1} .
16. Montrer que M est solution de $(\star)$ si et seulement si D est solution de $(\star)$.
17. Déterminer toutes les matrices D solutions de $(\star)$.
18. Conclure quant à l'ensemble des solutions de $(\star)$ dans G .

Partie I

1. D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k - 1 = \binom{2n}{0} X^0 + \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} X^k - 1 \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} X^k \\ &= X \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} X^{k-1} \end{aligned}$$

Ainsi :
en posant

$$B = \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} X^{k-1} = \binom{2n}{2n} X^{2n-1} + \dots + \binom{2n}{2} X^2 + \binom{2n}{1} \in \mathbb{R}[X],$$

on a bien $A = XB$; de plus, comme $\binom{2n}{2n} = 1 \neq 0$, le degré de B vaut $2n - 1$, son coefficient dominant est égal à 1 et on a $b_0 = 2n$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned} A(z) = 0 &\Leftrightarrow (z + 1)^{2n} = 1 \Leftrightarrow z + 1 \in \mathbb{U}_{2n} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket, z + 1 = e^{i \frac{2k\pi}{2n}} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket, z = e^{i \frac{k\pi}{n}} - 1 \end{aligned}$$

Pour tout $k \in \llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket$, on a en posant $z_k = e^{i \frac{k\pi}{n}} - 1$ (remarquons que $z_0 = 0$) :

$$\begin{aligned} z_k &= e^{i \frac{k\pi}{2n}} \left(e^{i \frac{k\pi}{2n}} - e^{-i \frac{k\pi}{2n}} \right) = 2ie^{i \frac{k\pi}{2n}} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) e^{i \frac{(k+n)\pi}{2n}} \end{aligned}$$

car $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Ainsi :

les racines de A sont $z_0 = 0$ et les nombres complexes $z_1, \dots, z_{2n-1}$ définis (sous forme trigonométrique) :

$$\forall k \in \llbracket 1, 2n-1 \rrbracket, \quad z_k = 2 \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) e^{i\frac{(k+n)\pi}{2n}}$$

3. On utilise le changement d'indice $\ell = 2n - k$ et on obtient :

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{\ell=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-\ell)\pi}{2n}\right) = \prod_{\ell=n+1}^{2n-1} \sin\left(\pi - \frac{\ell\pi}{2n}\right) \\ &= \prod_{\ell=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{\ell\pi}{2n}\right) \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$P_n = \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right).$$

En utilisant la relation de Chasles pour les produits, on a :

$$Q_n = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right) \left(\prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right) = P_n^2$$

d'après ce qui précède. On en déduit que $Q_n \geq 0$ (le carré d'un nombre réel étant positif ou nul) puis que $|P_n| = \sqrt{Q_n}$. Or :

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \geq 0 \quad \left(\text{car } 0 \leq \frac{k\pi}{2n} \leq \pi\right)$$

donc $P_n \geq 0$. Finalement, $|P_n| = P_n$ et donc :

$$P_n = \sqrt{Q_n}$$

4. Le polynôme B est unitaire, de degré $2n-1$ et ses racines complexes (deux à deux distinctes) sont $z_1, \dots, z_{2n-1}$ donc on dispose de la factorisation de B dans $\mathbb{C}[X]$ suivante :

$$B = \prod_{k=1}^{2n-1} (X - z_k)$$

– On sait que le coefficient constant b_0 de B vaut $2n$. On développant le produit ci-dessus, on a également :

$$b_0 = \prod_{k=1}^{2n-1} (-z_k) = (-1)^{2n-1} \prod_{k=1}^{2n-1} z_k = - \prod_{k=1}^{2n-1} z_k$$

Par conséquent :

$$\prod_{k=1}^{2n-1} z_k = -2n \tag{1}$$

– Par ailleurs, par définition des nombres complexes $z_1, \dots, z_{2n-1}$, on a :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{2n-1} z_k &= \prod_{k=1}^{2n-1} \left[2 \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) e^{i\frac{(k+n)\pi}{2n}} \right] \\ &= 2^{2n-1} \exp\left(\sum_{k=1}^{2n-1} i\frac{(k+n)\pi}{2n}\right) \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{k=1}^{2n-1} i\frac{(k+n)\pi}{2n} = \frac{1}{2n} \left(\frac{2n(2n-1)}{2} + n(2n-1) \right) i\pi = (2n-1)i\pi$$

Ainsi :

$$\prod_{k=1}^{2n-1} z_k = 2^{2n-1} e^{(2n-1)i\pi} Q_n = -2^{2n-1} Q_n \tag{2}$$

Les égalités (1) et (2) fournissent les valeurs de Q_n et P_n :

$$Q_n = \frac{n}{2^{2n-2}} \quad \text{et} \quad P_n = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

5. Le degré de la fraction rationnelle A est égal à $-2n < 0$ donc la partie entière de F est nulle. Les pôles de F sont tous simples donc, d'après le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, il existe des nombres complexes $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2n-1}$ tels que :

$$F = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\lambda_k}{X - z_k}$$

On sait de plus que :

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket, \quad \lambda_k &= \frac{1}{A'(z_k)} = \frac{1}{2n(z_k + 1)^{2n-1}} \\ &= \frac{z_k + 1}{2n(A(z_k) + 1)} \\ &= \frac{z_k + 1}{2n} \quad (\text{car } A(z_k) = 0) \end{aligned}$$

Ainsi, la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$F = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{z_k + 1}{X - z_k}$$

Partie II

6. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On considère l'application :

$$h_\lambda : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda x \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad h_\lambda = \lambda \text{Id}_E.$$

On résout :

$$\begin{aligned} (h_\lambda + \text{Id}_E)^{2n} - \text{Id}_E &= 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow (\lambda + 1)^{2n} \text{Id}_E - \text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)} \\ &\Leftrightarrow ((\lambda + 1)^{2n} - 1) \text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)} \\ &\Leftrightarrow (\lambda + 1)^{2n} - 1 = 0. \end{aligned}$$

Justifions cette dernière équivalence en raisonnant par double implication.

- Supposons que $((\lambda + 1)^{2n} - 1) \text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Comme E est différent de l'espace nul, il existe un vecteur x de E différent du vecteur nul. En évaluant en x dans l'égalité précédente, on obtient :

$$((\lambda + 1)^{2n} - 1) \text{Id}_E(x) = 0_{\mathcal{L}(E)}(x) \quad \text{c'est-à-dire} \quad ((\lambda + 1)^{2n} - 1)x = 0_E,$$

en notant 0_E le vecteur nul de E . Or $x \neq 0_E$ donc $(\lambda + 1)^{2n} - 1 = 0$.

- L'implication réciproque est évidente.

Finalement, les homothéties vectorielles h_λ solutions de l'équation sont celles pour lesquelles le rapport λ est racine du polynôme A , c'est-à-dire telles que

$$\lambda \in \{z_k, k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket\}.$$

7. D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \quad (3)$$

et (puisque $2n > 0$ pour la première égalité ci-dessous) :

$$0 = (1-1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k \quad (4)$$

En sommant les égalités, on obtient :

$$2^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (1 + (-1)^k)$$

Or :

$$\forall k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, \quad 1 + (-1)^k = \begin{cases} 2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Il reste donc dans la dernière somme :

$$2^{2n} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n} 2 \binom{2n}{k} = 2 \sum_{p=0}^n \binom{2n}{2p} \quad \text{donc} \quad \sum_{p=0}^n \binom{2n}{2p} = 2^{2n-1}$$

Comme :

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \binom{2n}{k} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \binom{2n}{k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k},$$

on en déduit que :

$$\sum_{p=0}^{n-1} \binom{2n}{2p+1} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \binom{2n}{k} = 2^{2n} - \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \binom{2n}{k} = 2^{2n} - 2^{2n-1} = 2^{2n-1}$$

Finalement :

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} = 2^{2n-1}$$

8. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie vectorielle de E . Comme s et Id_E commutent dans $\mathcal{L}(E)$, on a d'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} (s + \text{Id}_E)^{2n} &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} s^k \circ \text{Id}_E^{2n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} s^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} s^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} s^{2k+1} \end{aligned}$$

Or s est une symétrie vectorielle donc $s^2 = \text{Id}_E$. On en déduit que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad s^{2k} = (s^2)^k = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad s^{2k+1} = s^{2k} \circ s = s$$

Ainsi :

$$(s + \text{Id}_E)^{2n} = \left(\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \right) \text{Id}_E + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} \right) s$$

La question précédente permet de conclure que :

$$(s + \text{Id}_E)^{2n} - \text{Id}_E = (2^{2n-1} - 1) \text{Id}_E + 2^{2n-1} s$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} (s + \text{Id}_E)^{2n} - \text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)} &\Leftrightarrow (2^{2n-1} - 1) \text{Id}_E + 2^{2n-1} s = 0_{\mathcal{L}(E)} \\ &\Leftrightarrow s = (2^{1-2n} - 1) \text{Id}_E \quad (\text{car } 2^{2n-1} \neq 0) \end{aligned}$$

L'application $s = (2^{1-2n} - 1) \text{Id}_E$ n'est pas involutive car :

$$s^2 = (2^{1-2n} - 1)^2 \text{Id}_E \neq \text{Id}_E$$

puisque $(2^{1-2n} - 1)^2 \neq 1$. Ainsi, il n'existe pas de symétrie vectorielle de E solution de l'équation proposée.

Partie III

9. Tout d'abord, il est clair que $G \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. On a :

$$\begin{aligned} M \in G &\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{C}, M = M_{a,b} \\ &\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{C}, M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow M = aI + bJ \end{aligned}$$

où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Par conséquent :

$$G = \{aI + bJ, a, b \in \mathbb{C}\} = \text{Vect}(I, J)$$

Ainsi :

G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$; une base de cet espace est la famille (I, J) (cette famille est génératrice de G car $G = \text{Vect}(I, J)$ et elle est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires) donc $\dim(G) = 2$.

10. Soit $(x, y, z) \in E$. Comme M est la matrice de u dans la base canonique de E , on a :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in E_1 &\Leftrightarrow (u - (a + 2b) \text{Id}_E)((x, y, z)) = (0, 0, 0) \\ &\Leftrightarrow (M - (a + 2b)I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2b & b & b \\ b & -2b & b \\ b & b & -2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} \quad (\text{car } b \neq 0) \\ &\Leftrightarrow (x, y, z) = (x, x, x), \end{aligned}$$

la résolution du système étant immédiate (en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss). On en déduit que :

$$E_1 = \{x(1, 1, 1), x \in \mathbb{C}\} = \text{Vect}((1, 1, 1))$$

Posons $\varepsilon_1 = (1, 1, 1)$. La famille (ε_1) est génératrice de E_1 d'après l'égalité précédente et elle est libre car constituée d'un unique vecteur non nul. Par conséquent, (ε_1) est une base de E_1 . Finalement :

$$\text{une base de } E_1 \text{ est } (\varepsilon_1) \text{ où } \varepsilon_1 = (1, 1, 1).$$

11. Soit $(x, y, z) \in E$. On a :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in E_2 &\Leftrightarrow (M - (a - b)I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow x + y + z = 0 \quad (\text{car } b \neq 0) \\ &\Leftrightarrow (x, y, z) = (-y - z, y, z) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$E_2 = \{y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1), y, z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$$

Posons $\varepsilon_2 = (-1, 1, 0)$ et $\varepsilon_3 = (-1, 0, 1)$. La dernière égalité obtenue prouve que la $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une famille génératrice de E_2 . Cette famille est de plus libre puisqu'elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires. Par conséquent, $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E_2 .

Finalement, une base de E_2 est $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ où $\varepsilon_2 = (-1, 1, 0)$ et $\varepsilon_3 = (-1, 0, 1)$.

12. La famille $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une famille de trois vecteurs de l'espace vectoriel E qui est de dimension 3. Pour montrer que $\mathcal{C}$ est une base de E , il suffit donc de montrer que $\mathcal{C}$ est une famille libre. Pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 + \gamma\varepsilon_3 = (0, 0, 0) &\Leftrightarrow (\alpha - \beta - \gamma, \alpha + \beta, \alpha + \gamma) = (0, 0, 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta - \gamma = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = \alpha \\ \beta = -\alpha \\ \alpha + \alpha - \alpha = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0. \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{C}$ est donc libre. Finalement :

$$\text{la famille } \mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \text{ est une base de } E$$

13. Par définition de ε_1 , on a :

$$(u - (a + 2b) \text{Id}_E)(\varepsilon_1) = (0, 0, 0) \quad \text{c'est-à-dire} \quad u(\varepsilon_1) - (a + 2b)\varepsilon_1 = (0, 0, 0),$$

soit encore $u(\varepsilon_1) = (a + 2b)\varepsilon_1$. De la même manière, on a :

$$u(\varepsilon_2) = (a - b)\varepsilon_2 \quad \text{et} \quad u(\varepsilon_3) = (a - b)\varepsilon_3.$$

Ainsi, la matrice D de u dans la base $\mathcal{C}$ est :

$$D = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}.$$

14. On sait que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de E donc :

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0) \quad \text{et} \quad e_3 = (0, 0, 1).$$

Ainsi :

$$\varepsilon_1 = (1, 1, 1) = e_1 + e_2 + e_3, \quad \varepsilon_2 = (-1, 1, 0) = -e_1 + e_2 \quad \text{et} \quad \varepsilon_3 = (-1, 0, 1) = -e_1 + e_3.$$

Par conséquent :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On sait que P^{-1} est la matrice des coordonnées des vecteurs e_1, e_2 et e_3 exprimés dans la base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. On remarque que :

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = 3e_1 \quad \text{donc} \quad e_1 = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3).$$

Ensuite :

$$e_2 = e_1 + \varepsilon_2 = \frac{1}{3}\varepsilon_1 + \frac{2}{3}\varepsilon_2 + \frac{1}{3}\varepsilon_3 \quad \text{et} \quad e_3 = e_1 + \varepsilon_3 = \frac{1}{3}\varepsilon_1 + \frac{1}{3}\varepsilon_2 + \frac{2}{3}\varepsilon_3$$

Finalement :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

15. D'après les formules de changement de base, on a l'égalité :

$$M = PDP^{-1}.$$

16. On a :

$$(M + I)^{2n} - I = 0 \Leftrightarrow (PDP^{-1} + I)^{2n} = I.$$

En remarquant que $I = PIP^{-1}$, et en utilisant la bilinéarité du produit matriciel, on peut écrire que :

$$PDP^{-1} + I = P(D + I)P^{-1}$$

Une récurrence immédiate fournit :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (P(D + I)P^{-1})^k = P(D + I)^k P^{-1}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} (M + I)^{2n} - I = 0 &\Leftrightarrow P(D + I)^{2n} P^{-1} = I \Leftrightarrow P^{-1} P(D + I)^{2n} P^{-1} P = P^{-1} I P \\ &\Leftrightarrow (D + I)^{2n} = I \\ &\Leftrightarrow (D + I)^{2n} - I = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, M est solution de $(\star)$ si et seulement si D est solution de $(\star)$.

17. La matrice :

$$D + I = \begin{pmatrix} a+2b+1 & 0 & 0 \\ 0 & a-b+1 & 0 \\ 0 & 0 & a-b+1 \end{pmatrix}$$

est diagonale donc :

$$(D + I)^{2n} = \begin{pmatrix} (a+2b+1)^{2n} & 0 & 0 \\ 0 & (a-b+1)^{2n} & 0 \\ 0 & 0 & (a-b+1)^{2n} \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 (D + I)^{2n} - I = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (a + 2b + 1)^{2n} & 0 & 0 \\ 0 & (a - b + 1)^{2n} & 0 \\ 0 & 0 & (a - b + 1)^{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow (a + 2b + 1)^{2n} = 1 \text{ et } (a - b + 1)^{2n} = 1 \\
 &\Leftrightarrow \exists k, \ell \in \llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket, \begin{cases} a + 2b + 1 = z_k \\ a - b + 1 = z_\ell \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists k, \ell \in \llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket, \begin{cases} a = \frac{z_k + 2z_\ell}{3} - 1 \\ b = \frac{z_k - z_\ell}{3} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists k, \ell \in \llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket, k \neq \ell \text{ et } \begin{cases} a = \frac{z_k + 2z_\ell}{3} - 1 \\ b = \frac{z_k - z_\ell}{3} \end{cases}
 \end{aligned}$$

car b est supposé différent de 0.

Ainsi, les matrices $D = \begin{pmatrix} a + 2b & 0 & 0 \\ 0 & a - b & 0 \\ 0 & 0 & a - b \end{pmatrix}$ solutions de $(\star)$, où $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}^*$ sont celles pour lesquelles :

$$\exists k, \ell \in \llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket, k \neq \ell \text{ et } \begin{cases} a = \frac{z_k + 2z_\ell}{3} - 1 \\ b = \frac{z_k - z_\ell}{3} \end{cases}.$$

18. Soit $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. D'après les questions 16. et 17., la matrice $M = M_{a,b}$ est solution de $(\star)$ si et seulement s'il existe $k, \ell \in \llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket$ tels que $k \neq \ell$ et :

$$\begin{cases} a = \frac{z_k + 2z_\ell}{3} - 1 \\ b = \frac{z_k - z_\ell}{3} \end{cases} \quad (\diamond)$$

Si $b = 0$, alors $M = M_{a,0} = aI$ et :

$$\begin{aligned}
 (M + I)^{2n} - I = 0 &\Leftrightarrow ((a + 1)^{2n} - 1)I = 0 \\
 &\Leftrightarrow (a + 1)^{2n} = 1 \quad (\text{car } I \neq 0) \\
 &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket, a + 1 = z_k \\
 &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket, a = z_k - 1.
 \end{aligned}$$

Les valeurs de a et b sont ici celles de $(\diamond)$ pour $\ell = k$. Finalement, l'ensemble des solutions de $(\star)$ est

$$\left\{ M_{\frac{z_k + 2z_\ell}{3} - 1, \frac{z_k - z_\ell}{3}}, k, \ell \in \llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket \right\}.$$