

Chapitre 8

Intégration sur un intervalle quelconque

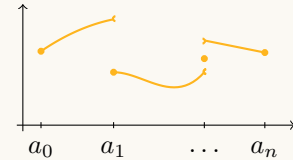
Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition - Fonctions continues par morceaux

On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{F}(S, \mathbb{K})$ est continue par morceaux sur un segment S s'il existe une subdivision $\sigma = \{a_0, \dots, a_n\}$ de I telle que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$f|_{]a_k, a_{k+1}[}$ est continue et prolongeable par continuité sur $[a_k, a_{k+1}]$.

Si I est un intervalle quelconque, on dit que $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ est continue par morceaux sur I si pour tout segment $S \subset I$, la fonction $f|_S$ est continue par morceaux sur S .



Dans la suite, on note $\mathcal{C}_m(I)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur le segment I .

Exemples.

- La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue par morceaux, car sa restriction à tout segment est continue par morceaux (avec un nombre fini de morceaux).
- La fonction $x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor$ est continue par morceaux sur $]0, 1]$.

Remarque. Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée : il suffit d'appliquer le théorème des bornes atteintes au prolongement continu de f sur chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$.

I Intégrale sur un intervalle quelconque

1. Intégrale sur un intervalle $[a, b[$ ou $]a, b]$

Nous nous intéressons ici à l'intégration de fonctions continues par morceaux sur un intervalle du type $I = [a, b[$, où $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. L'intégration sur un intervalle du type $]a, b]$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, est analogue.

Définition - Intégrale généralisée sur $[a, b[$

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. On dit que l'intégrale $\int_a^b f$ est *convergente* si la fonction

$$x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

admet une limite dans $\mathbb{K}$ en b . Dans ce cas, on note cette limite $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t) dt$, ou encore $\int_I f$.

⚠ Dans le cas où la limite ci-dessus n'existe pas, on dit que l'intégrale est divergente. Dans ce cas, on peut toujours écrire l'intégrale $\int_a^b f$, mais $\int_a^b f$ ne désigne pas un nombre.

Remarques.

- Lorsque la fonction f n'est pas définie en l'une des bornes a ou b , on dit que $\int_a^b f$ est impropre en cette borne. Étudier la nature de l'intégrale impropre, c'est déterminer si elle converge ou non. On peut par exemple faire un calcul d'intégrale sur un segment $[a, x]$, puis un passage à la limite.
- Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$, alors en écrivant les intégrales sur des segments, on a :

$$\left| \int_a^b f - \int_a^x f \right| = \left| \int_x^b f \right| \leq \int_x^b |f| \leq \|f\|_\infty (b - x) \xrightarrow{x \rightarrow b} 0, \quad \text{donc} \quad \int_a^x f \xrightarrow{x \rightarrow b} \int_a^b f.$$

Ainsi, considérer l'intégrale généralisée où l'intégrale sur le segment $[a, b]$ revient au même.

- Si f est continue sur $[a, b[$ et F est une primitive de f sur $[a, b[$, alors pour tout $x \in [a, b[$, $\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$, donc $\int_a^b f$ est convergente si et seulement si F admet une limite finie en b .

Exemple. Étude de la nature de l'intégrale $\int_0^1 \ln t dt$, qui est impropre en 0. Pour tout $x \in]0, 1]$, on a

$$\int_x^1 \ln t dt = [t \ln t - t]_x^1 = -1 - x \ln x + x.$$

Ainsi, $\int_x^1 \ln t dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1$, donc l'intégrale est convergente, et $\int_0^1 \ln t dt = -1$.

Dans le cas où f n'est pas définie en une des bornes réelles a ou b , mais est prolongeable par continuité en ce point, tout se passe comme lorsqu'on intègre sur un segment. On parle alors d'intégrale faussement impropre.

Théorème - Intégrale faussement impropre

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, b[, \mathbb{K})$ avec $b \in \mathbb{R}$, et prolongeable par continuité en b . On note $\tilde{f}$ le prolongement sur $[a, b]$. Alors $\int_a^b f(t) dt$ converge et

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \tilde{f}(t) dt.$$

Démonstration. Pour tout $x \in [a, b[$, on a $\int_a^x f = \int_a^x \tilde{f}$, or nous avons vu que $\int_a^x \tilde{f} \xrightarrow{x \rightarrow b} \int_a^b \tilde{f}$ car $\tilde{f}$ est continue par morceaux sur $[a, b]$. $\square$

Exemple. L'intégrale $\int_0^1 t \ln t dt$ est convergente, car $t \mapsto t \ln t$ est continue sur $]0, 1]$ et a une limite finie en 0.

2. Intégrales de référence

Nous allons voir que pour déterminer la nature d'une intégrale généralisée, il est possible comme dans le cas des séries de se ramener à des comparaisons avec des intégrales dont on connaît la nature. Il sera alors précieux de connaître le comportement d'intégrales types.

Théorème - Intégrales de Riemann

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

- i. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
- ii. L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
- iii. Les intégrales $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt$ et $\int_a^b \frac{1}{(t-b)^\alpha} dt$ convergent si et seulement si $\alpha < 1$.

Démonstration. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Si $\alpha \neq 1$, on a

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[-\frac{1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} \right]_1^x = \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1, \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

Par ailleurs, $\int_1^x \frac{1}{t} dt = [\ln t]_1^x = \ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Les autres cas sont analogues, et laissés en exercice. $\square$

Exemples.

1. Les intégrales $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ et $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt$ sont convergentes.
2. Les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$, $\int_0^1 \frac{1}{t^2} dt$ et $\int_1^2 \frac{1}{(t-1)^2} dt$ sont divergentes.

Théorème - Intégrale exponentielle

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$ converge si et seulement si $\lambda > 0$.

Démonstration. La fonction $t \mapsto e^{\lambda t}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

- On a $\int_0^x 1 dt = x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, donc l'intégrale diverge lorsque $\lambda = 0$.
- Si $\lambda \neq 0$, alors $\int_0^x e^{-\lambda t} dt = \left[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \right]_0^x = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{\lambda} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & \text{si } \lambda > 0, \\ +\infty & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$

Par conséquent, l'intégrale converge si et seulement si $\lambda > 0$. □

Théorème - Intégrale du logarithme

L'intégrale $\int_0^1 \ln t dt$ converge.

Démonstration. Rencontré plus haut. □

Le cas des intégrales de Bertrand, évoqué dans l'exercice suivant, n'est pas au programme, mais le résultat est à connaître, et à savoir redémontrer si besoin.

Exercice : Intégrales de Bertrand. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on note $I_{\alpha, \beta} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt$. Montrer que :

- si $\alpha > 1$, alors l'intégrale $I_{\alpha, \beta}$ converge,
- si $\alpha = 1$, alors l'intégrale $I_{\alpha, \beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$,
- si $\alpha < 1$, alors l'intégrale $I_{\alpha, \beta}$ diverge.

3. Intégrale sur un intervalle $]a, b[$

On suppose ici que $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et on s'intéresse à l'intégration de fonctions continues par morceaux sur $I =]a, b[$.

Définition - Intégrale généralisée sur $]a, b[$

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, b[, \mathbb{K})$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f$ est convergente s'il existe $c \in]a, b[$ tel que les intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent, on dit que $\int_a^b f$ est convergente en a et en b . On pose alors

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Remarques.

- Si $\int_a^b f$ est convergente, alors on a même : pour tout $c \in]a, b[$, les intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent.
- Pour montrer la convergence, il suffit de vérifier qu'il existe $c, d \in]a, b[$ tels que $\int_a^c f$ et $\int_d^b f$ convergent.
- Pour montrer la divergence, il suffit de prouver la divergence en l'une des bornes.

 Il ne suffit pas de montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x f(t) dt$ existe et est finie pour montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge.

Exemple. On a $\int_{-x}^x t dt = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, mais $\int_0^{+\infty} t dt$ diverge, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t dt$ diverge.

4. Propriétés

Nous allons voir que, sous réserve de convergence, les propriétés des intégrales sur un segment se généralisent au cas des intégrales sur un intervalle quelconque.

Nous énonçons les résultats pour des fonctions continues par morceaux sur $I = [a, b[$, mais ils sont tout autant valables pour le cas $I =]a, b]$ ou $I =]a, b[$.

Théorème – Linéarité de l'intégrale

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m([a, b[, \mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

- Si $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent, alors $\int_a^b (\lambda f + \mu g)$ converge, et $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.
- Si $\int_a^b f$ converge et $\int_a^b g$ diverge, alors $\int_a^b (f + g)$ diverge.

Démonstration. Le résultat découle directement de la linéarité de l'intégrale sur un segment et des résultats sur les limites, par convergence des intégrales. $\square$

Remarque. ⚠ Si $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ divergent, on ne peut rien conclure en général sur la nature de $\int_a^b (f + g)$.

Théorème – Positivité et croissance

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m([a, b[, \mathbb{K})$ telles que $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent.

- *Positivité.* Si f est positive sur $[a, b[$, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.
- *Croissance.* Si $f \leq g$ sur $[a, b[$, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.
- *Stricte positivité.* Si f est continue, positive sur $[a, b[$ et non identiquement nulle, alors $\int_a^b f > 0$.

Démonstration. Comme ci-dessus, les résultats se déduisent de leurs analogues pour les intégrales sur un segment, combinés avec les propriétés de passage à la limite. $\square$

Remarque. La propriété de stricte positivité est souvent utilisée sous sa forme contraposée, qui doit être très bien connue :

si f est continue et positive sur $[a, b[$, d'intégrale convergente nulle, alors f est identiquement nulle.

⚠ Si f n'est pas positive, le résultat n'est bien sûr pas valable, et si f n'est pas continue, il ne l'est pas non plus.

Théorème – Relation de Chasles

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, b[, \mathbb{K})$ telle que $\int_a^b f$ converge. Alors pour tout $c \in [a, b[$,

$$\int_c^b f(t) dt \text{ converge, et } \int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Démonstration. Ceci découle directement de la relation de Chasles pour les intégrales sur un segment, et de la définition de la convergence de l'intégrale généralisée. $\square$