

Chapitre 7

Suites et séries de fonctions

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Nous nous intéressons ici à différentes notions de convergence de suites de fonctions de I dans $\mathbb{K}$, voire de fonctions d'un espace vectoriel normé de dimension finie dans un autre.

Comme on l'a remarqué dans le chapitre ESPACES VECTORIELS NORMÉS, il peut y avoir plusieurs notions de convergence pour une suite dans un espace vectoriel normé, selon la norme dont on le munit. On peut même définir des notions de convergence qui ne sont pas associées à une norme.

I Suites de fonctions

1. Convergence simple, convergence uniforme

La première notion de convergence que nous présentons ci-dessous est la convergence simple, dite aussi ponctuelle : il s'agit de la convergence "point par point" d'une suite de fonctions.

Définition - Convergence simple

Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$, et f une fonction de I dans $\mathbb{K}$. On dit que (f_n) converge *simplement*, ou ponctuellement, vers f si

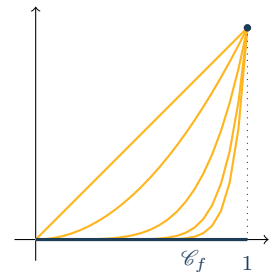
$$\forall x \in I, f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x).$$

Autrement dit, $\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. On note alors $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{cvs}} f$.

Exemple. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ définie sur $[0, 1]$. Pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$f_n(x) = x^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[, \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Ainsi, $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{cvs}} f$, où $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[, \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$



Remarque. On note que dans l'exemple ci-dessus, les fonctions f_n sont toutes continues sur $[0, 1]$, mais la limite f ne l'est pas.

Notation. On rappelle que si f est bornée sur I , on note

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$$

ce que l'on note parfois aussi $\|f\|_{\infty, I}$ lorsqu'on veut préciser I .

L'application $\|\cdot\|_\infty$ ne définit pas à proprement parler une norme sur $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, car elle n'est pas définie pour f si f n'est pas bornée. On peut toutefois l'utiliser pour définir la notion de convergence uniforme qui coïncide pour les fonctions bornées avec la convergence pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Définition - Convergence uniforme

Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$, et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$. On dit que (f_n) converge *uniformément* vers f si $f_n - f$ est bornée à partir d'un certain rang, et

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Autrement dit ¹, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. On note alors $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{cvu}} f$.

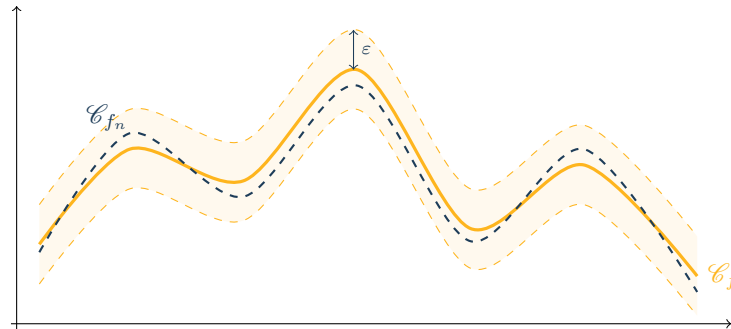
Remarques.

- On notera la différence de l'écriture quantifiée des deux définitions :

Convergence simple : $\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ↖ dépend de x

Convergence uniforme : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ↖ ne dépend pas de x

- Géométriquement, la convergence uniforme de (f_n) vers f signifie que tout “tube” autour de la courbe de f contient entièrement les courbes des fonctions f_n à partir d'un certain rang.



- On peut définir $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, à condition que l'application soit à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Avec ce choix, la convergence uniforme de (f_n) vers f s'écrit simplement : $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.
- sur l'espace vectoriel $\mathcal{F}_b(I, \mathbb{K})$ des fonctions bornées sur I , la convergence uniforme n'est autre que la convergence de la suite (f_n) vers f pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Théorème - Convergence uniforme et convergence simple

Si (f_n) est une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ converge uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ sur I , alors (f_n) converge simplement vers f sur I .

Démonstration. Pour tout $x \in I$, on a $|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, donc (f_n) converge simplement vers f . $\square$

Remarque. On retiendra donc que si une suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f , alors on ne peut avoir convergence uniforme de la suite (f_n) que vers la fonction f .

Théorème

Soient (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$. S'il existe une suite réelle (u_n) telle que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et

$$\forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq u_n,$$

alors (f_n) converge uniformément vers f sur I .

Démonstration. Par passage au sup, on a $0 \leq \|f_n - f\|_\infty \leq u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, ce qui conclut par encadrement. $\square$

⚠ La suite (u_n) dans l'expression ci-dessus doit donc être *indépendante de x* !



Montrer la convergence uniforme

Pour étudier la convergence uniforme d'une suite de fonctions (f_n) , on commence par étudier la convergence simple. Si on a convergence simple vers une fonction f , on peut :

1. En effet, $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon \Leftrightarrow \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

- déterminer explicitement $\|f_n - f\|_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par exemple par étude de fonction), puis montrer que $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,
- chercher à majorer la suite $(\|f_n - f\|_\infty)$ par une suite qui tend vers 0, et conclure par encadrement.

Exemple. Considérons la suite de fonctions (f_n) donnée par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto e^{-(x+n)}$. Étudions la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}_+$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $e^{-(x+n)} = e^{-x}e^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi, $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{cvs}} f$ sur $\mathbb{R}_+$, où f est la fonction nulle.
- On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, |f_n(x) - f(x)| = e^{-x}e^{-n} \leq e^{-n},$$
donc $\|f_n - f\|_\infty \leq e^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui entraîne que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{cvu}} f$ sur $\mathbb{R}_+$.



Montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme

Pour montrer qu'une suite (f_n) ne converge pas uniformément vers une fonction f , on commence par examiner la convergence simple : s'il n'y a pas convergence simple, il n'y a pas convergence uniforme. Ensuite, on cherche à montrer que $\|f_n - f\|_\infty \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$:

- soit on détermine $\|f_n - f\|_\infty$, par exemple par étude de fonction,
- soit on cherche une suite (x_n) de I telle que $|f_n(x_n) - f(x_n)| \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On conclut alors par contraposée dans le deuxième point car :

$$\text{si } f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{cvu}} f, \text{ alors pour toute suite } (x_n) \text{ de } I, |f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Exemples.

1. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto e^{-(x+n)^2}$, alors il y a convergence simple vers la fonction nulle f sur $\mathbb{R}$, comme ci-dessus, mais il n'y a pas convergence uniforme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(-n) - f(-n)| = 1, \text{ donc } \|f_n - f\|_\infty \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

2. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto x^n$, nous avons vu que (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers $f : \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$.
Or, si on pose $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 - \frac{1}{n})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n - f\|_\infty \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1}$, ce qui entraîne que $\|f_n - f\|_\infty \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Nous allons voir ci-dessous un moyen plus direct de voir ce résultat.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \cos \frac{x}{n}$.
 - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, par continuité de la fonction $\cos$, on a $\cos \frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Ainsi, $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{cvs}} h$, où f est la fonction constante égale à 1.
 - En revanche, (f_n) ne converge pas uniformément :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, |f_n(n\pi) - f(n\pi)| = 2, \text{ donc } \|f_n - f\|_\infty \geq 2, \text{ et } \|f_n - f\|_\infty \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Théorème - Convergence uniforme et continuité

Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément vers une fonction f . Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en $a \in I$, alors f est continue en a .

En particulier, si les fonctions f_n sont toutes continues sur I , alors f est continue sur I .

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$. Ensuite, par continuité de f_n en a , il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|x - a| < \eta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Ainsi, si $x \in I$ est tel que $|x - a| < \eta$, alors on a

$$|f(x) - f(a)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\leq \|f_n - f\|_\infty} + |f_n(x) - f_n(a)| + \underbrace{|f_n(a) - f(a)|}_{\leq \|f_n - f\|_\infty} < \varepsilon.$$

Ainsi, on a montré : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$, c'est-à-dire que f est continue en a . $\square$

Remarque. La contraposée du résultat ci-dessus exprime que, dans le cas où les fonctions f_n sont continues sur I , si f n'est pas continue sur I , alors (f_n) ne converge pas uniformément vers f .

Exemple. On retrouve le résultat rencontré dans l'exemple précédent : si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto x^n$, alors la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f introduite plus haut, qui est discontinue en 0. Comme les fonctions f_n sont continues sur $[0, 1]$, on ne peut pas avoir convergence uniforme de (f_n) sur $[0, 1]$.

Comme la continuité est une notion locale, il n'est pas nécessaire d'avoir la convergence uniforme sur tout I pour pouvoir conclure à la continuité de la limite uniforme. On retiendra que la convergence uniforme sur tout segment est suffisante.

Corollaire - Convergence uniforme sur tout segment et continuité

Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ qui converge uniformément vers une fonction f sur tout segment de I , alors f est continue sur I .

Démonstration. Pour $a \in I$, il suffit de considérer un segment $[\alpha, \beta]$ de I non réduit à un point qui contient a dans son intérieur, ou comme extrémité si a est une extrémité de I . Comme il y a convergence uniforme sur $[\alpha, \beta]$, la fonction f est continue sur $[\alpha, \beta]$, donc en a . $\square$

Remarque. Dans la pratique, on ne vérifie pas tout le temps la convergence uniforme sur tout segment, mais sur des intervalles adaptés à la situation : $[-a, a]$ pour $a \in \mathbb{R}_+$, $[0, b]$ pour $b \in \mathbb{R}_+$, etc.

Exemple. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$f_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

On sait alors que (f_n) converge simplement vers $f = \exp$ sur $\mathbb{R}$. On n'a pas convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n - f$ n'est pas bornée². En revanche, il y a convergence uniforme $[-a, a]$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+$:

$$\forall x \in [-a, a], |f(x) - f_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

car $\sum_k \frac{a^k}{k!}$ converge. Ainsi, $\|f - f_n\|_{\infty, [-a, a]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, et (f_n) converge uniformément vers f sur $[-a, a]$.

Comme les fonctions f_n sont continues sur $[-a, a]$, on retrouve que la fonction $f = \exp$ est continue sur $[-a, a]$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, donc continue sur $\mathbb{R}$.

2. Théorème de la double limite

On remarque que le théorème de continuité en a de la limite uniforme énoncé ci-dessus affirme que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$ ce qui peut se reformuler de la manière suivante :

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x).$$

Le théorème ci-dessous généralise ce résultat au cas plus global où pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite en a , point adhérent de I .

Rappel. On dit que $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est un point adhérent de I s'il existe une suite (x_n) de I telle que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $|f(x) - f_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Théorème – Théorème de la double limite

Soient (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ et a un point adhérent à I . On suppose que

- la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction f sur I ,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_n \in \mathbb{K}$.

Alors (ℓ_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{K}$, et

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell.$$

En d'autres termes, $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \ell$.

Démonstration. *Non exigible.* Commençons par montrer la convergence de (ℓ_n) . Nous allons montrer que la suite (ℓ_n) est de Cauchy, i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, p \geq N, |\ell_n - \ell_p| < \varepsilon$. On conclura en utilisant le lemme suivant :

Lemme (HP). Toute suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$ converge.

Preuve. ▶ Si (ℓ_n) est de Cauchy, on montre qu'elle est bornée (comme pour montrer qu'une convergente est bornée). Par Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une suite $(\ell_{\varphi(n)})$ qui converge vers $\ell \in \mathbb{K}$. Montrons que $\ell_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

On fixe $\varepsilon > 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1, |\ell_{\varphi(n)} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$, et $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, p \geq N_2, |\ell_n - \ell_p| < \frac{\varepsilon}{2}$. Si $n \geq \max(N_1, N_2)$, alors $\varphi(n) \geq N_2$, et

$$|\ell_n - \ell| \leq |\ell_n - \ell_{\varphi(n)}| + |\ell_{\varphi(n)} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \blacktriangleleft$$

On fixe $\varepsilon > 0$, et un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N, \|f_n - f\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour tous $n, p \geq N$,

$$\forall x \in I, |f_n(x) - f_p(x)| \leq \|f_n - f_p\|_{\infty} \leq \|f_n - f\|_{\infty} + \|f - f_p\|_{\infty} \leq \varepsilon.$$

En passant à la limite pour $x \rightarrow a$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient :

$$\forall n, p \geq N, |\ell_n - \ell_p| \leq \varepsilon,$$

c'est-à-dire que (ℓ_n) est de Cauchy, donc converge, et on note ℓ sa limite. Montrons maintenant $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$: on fixe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_n - f\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{3}$ et $|\ell_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{3}$, puis $\eta > 0$ tel que si $|x - a| < \eta$, alors $|f_n(x) - \ell_n| < \frac{\varepsilon}{3}$.

$$\text{Si } |x - a| < \eta, \text{ alors } |f(x) - \ell| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\leq \|f_n - f\|_{\infty}} + |f_n(x) - \ell_n| + |\ell_n - \ell| \leq \varepsilon,$$

donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$. □

⚠ Si on ne suppose plus la convergence uniforme, le théorème ne tient plus.

Exemple. On considère à nouveau la suite de fonctions (f_n) , où $f_n : x \mapsto x^n$. Pour tout $x \in [0, 1[$, on a $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0, \text{ mais } \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} f_n(x) = 1.$$

Ce n'est bien sûr pas incompatible avec le théorème de la double limite : on a vu que (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

3. Intégration et limite uniforme

Le résultat qui suit énonce que si une suite (f_n) de fonctions continues converge uniformément vers f sur un segment, alors la suite des primitives des f_n s'annulant en a converge uniformément vers la primitive de f s'annulant en a .

Théorème – Primitivation et convergence uniforme

Soient (f_n) une suite de fonctions continues d'un segment $I = [a, b]$ dans $\mathbb{K}$. On suppose que (f_n) converge uniformément sur I vers une fonction f , et on note :

3. Comme $\|f_n - f\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N, \|f_n - f\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{3}$,

Comme $\ell_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N', |\ell_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{3}$. On choisit ensuite $n \geq \max(N, N')$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t) dt, \quad \text{et} \quad F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt,$$

Alors, la suite de fonctions (F_n) converge uniformément vers F sur I .

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a pour tout $x \in I$,

$$|F(x) - F_n(x)| = \left| \int_a^x (f(t) - f_n(t)) dt \right| \leq \int_a^x |f(t) - f_n(t)| dt \leq \int_a^x \|f - f_n\|_\infty dt = (x - a) \|f - f_n\|_\infty.$$

Ainsi, $\forall x \in I$, $|F(x) - F_n(x)| \leq (b - a) \|f - f_n\|_\infty$, donc $\|F - F_n\|_\infty \leq (b - a) \|f - f_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. $\square$

Le résultat qui suit peut être vu comme une conséquence du précédent, il exprime qu'on peut intervertir une limite et une intégrale sur un segment lorsqu'il y a convergence uniforme.

Théorème - Intersion limite uniforme – intégrale

Soit (f_n) une suite de fonctions continues d'un segment $I = [a, b]$ dans $\mathbb{K}$ qui converge uniformément vers une fonction f sur I . Alors

$$\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

Démonstration. On a $\left| \int_a^b (f(t) - f_n(t)) dt \right| \leq \int_a^b |f(t) - f_n(t)| dt \leq \int_a^b \|f - f_n\|_\infty dt = (b - a) \|f - f_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. $\square$

Remarque. On peut reformuler la conclusion du théorème ci-dessus en : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$.

4. Convergence uniforme et dérivation

Dans ce paragraphe, nous considérons une suite de fonctions dérivables f_n qui a pour limite f (en un certain sens) et nous nous demandons si f est dérivable et, dans ce cas, si (f'_n) converge vers f' en un certain sens. En toute généralité, la réponse est non.

Exemple. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \sqrt{x + \frac{1}{n}}$. On a $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{cvu}} f$, où $f : x \mapsto \sqrt{x}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, |f_n(x) - f(x)| = \sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}},$$

ainsi $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, et $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{cvu}} f$, les fonctions f_n sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$, mais f n'est pas dérivable en 0.

En revanche, lorsqu'on suppose la convergence uniforme de la suite (f'_n) , nous allons voir que le résultat est vrai.

Théorème - Convergence uniforme et dérivation

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $I = [a, b]$, qui converge simplement vers une fonction f . Si la suite (f'_n) converge uniformément vers une fonction g , alors

- ◇ (f_n) converge uniformément vers f sur I ,
- ◇ f est de classe $\mathcal{C}^1$, et $f' = g$.

Remarque. On retiendra qu'il suffit de vérifier la convergence uniforme de la suite des dérivées pour obtenir les deux conclusions du théorème.

Démonstration.

- ◇ Comme (f'_n) converge uniformément vers g , le théorème d'intersion limite uniforme - intégrale donne que pour tout x ,

$$f_n(x) = \int_a^x f'_n(t) dt + f_n(a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^x g(t) dt + f(a)$$

Par unicité de la limite simple de (f_n) , la fonction f est la fonction : $x \mapsto \int_a^x g(t) dt + f(a)$. Ainsi, la fonction, f est dérivable, de dérivée g . Par conséquent, f est de classe $\mathcal{C}^1$.

◇ Justifions la convergence uniforme de (f_n) vers f : pour tout $x \in [a, b]$,

$$|f(x) - f_n(x)| = \left| \int_a^x (f'(t) - f'_n(t)) dt + f(a) - f_n(a) \right| \leq \int_a^x |f'(t) - f'_n(t)| dt + |f(a) - f_n(a)|,$$

$$\text{donc } \|f - f_n\|_\infty \leq \int_a^b \|f' - f'_n\|_\infty dt + |f(a) - f_n(a)| \leq (b-a) \|f' - f'_n\|_\infty + |f(a) - f_n(a)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \square$$

Remarques.

- Une simple adaptation de la preuve permet de montrer que si I est un intervalle quelconque, et si (f'_n) converge uniformément sur tout segment de I , alors (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I .
- Dans la pratique, pour montrer que la limite f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I quelconque, on se ramène souvent à vérifier le caractère $\mathcal{C}^1$ sur tout segment, ou sur des intervalles adaptés à la situation.

Corollaire

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur un segment $[a, b]$ telle que pour tout $i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, $(f_n^{(i)})$ converge simplement vers une fonction g_i . Si la suite $(f_n^{(k)})$ converge uniformément vers une fonction g , alors

- ◇ (f_n) converge uniformément vers g_0 sur I ,
- ◇ f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I , et pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $f^{(i)} = g_i$.

Démonstration. Par récurrence sur k . □

Remarques.

- Ceci entraîne que si $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ et $x \in I$, alors $f^{(i)}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(i)}(x)$.
- De même que ci-dessus, pour montrer que la limite simple f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle quelconque, on se ramène souvent à le montrer sur tout segment, ou sur des intervalles adaptés.

II Séries de fonctions

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction de I dans $\mathbb{K}$, on appelle série de fonctions de terme général f_n et on note $\sum f_n$ la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dite suite des sommes partielles, donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n f_k.$$

1. Convergence simple, uniforme, normale d'une série de fonctions

Définition - Convergence simple, convergence uniforme

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$

- converge simplement sur I si la suite des sommes partielles (S_n) converge simplement sur I ,
- converge uniformément sur I si la suite des sommes partielles (S_n) converge uniformément sur I .

Si la série $\sum f_n$ converge simplement, on appelle *somme* de la série et *restes* les fonctions

$$S : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x), \quad \text{et} \quad R_n : x \mapsto \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x).$$

On a alors $S - S_n = R_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque.

- La convergence simple de la série $\sum f_n$ sur I équivaut à l'existence de sa somme sur I .

- Comme les notions de convergence simple et uniforme sont les mêmes que pour les fonctions, tout ce qui a été dit ci-dessus s'applique. En particulier, la convergence uniforme implique la convergence simple. On commencera donc généralement par étudier la convergence simple.

Théorème – Convergence uniforme et restes

Une série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et la suite (R_n) de ses restes converge uniformément vers la fonction nulle.

Démonstration. En cas de convergence simple, la convergence uniforme équivaut à $\|S - S_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, c'est-à-dire $\|R_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. $\square$

Exemple. On s'intéresse à la convergence simple et uniforme sur $[0, 1[$ de la série de fonction $\sum f_n$, où $f_n : x \mapsto x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Si $x \in [0, 1[$, alors la série géométrique $\sum x^n$ est convergente, donc $\sum f_n$ converge, et sa somme est $S = x \mapsto \frac{1}{1-x}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall x \in [0, 1[, |S(x) - S_n(x)| = |R_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x} \quad \text{donc} \quad |R_n(x)| \xrightarrow{x \rightarrow 1} +\infty.$$

Ainsi, la fonction R_n n'est pas bornée ($\|R_n\|_\infty = +\infty$). Par conséquent, la suite (R_n) ne converge pas uniformément vers 0, donc il n'y a pas convergence uniforme de la série $\sum f_n$ sur $[0, 1[$.

- En revanche, si $a \in [0, 1[$, il y a convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $[0, a]$: pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in [0, a], |R_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a|^k = \frac{|a|^{n+1}}{1-|a|}, \quad \text{donc} \quad \|R_n\|_{\infty, [0, a]} \leq \frac{|a|^{n+1}}{1-|a|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par conséquent, (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, a]$, et il y a convergence uniforme de la série $\sum f_n$ sur $[0, a]$.

Définition – Convergence normale

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge *normalement* sur I si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée sur I , et

$$\sum \|f_n\|_\infty \text{ converge.}$$

Remarque. La convergence normale n'est autre que la convergence absolue de la série $\sum f_n$ dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}_b(I, \mathbb{K})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

 La convergence normale n'a de sens que pour une série de fonctions, elle n'en a pas pour une suite.

Théorème – Convergence normale et convergence uniforme

Si une série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I , alors elle converge uniformément sur I .

Démonstration. On suppose que $\sum f_n$ converge normalement sur I . Montrons la convergence simple : pour tout $x \in I$, on a $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$. Comme $\|f_n\|_\infty$ est le terme général d'une série convergente, la série $\sum f_n(x)$ converge absolument, donc converge, par comparaison des séries à termes positifs. Il y a donc convergence simple de $\sum f_n$ sur I .

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in I, |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$$

Ainsi, $\|R_n\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (reste d'une série convergente), et $R_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{cvu} 0$, donc $\sum f_n$ converge uniformément sur I . $\square$

⚠ Comme on va le voir, la réciproque est fautive : une série de fonctions peut converger uniformément sans converger normalement. On retiendra qu'on a les implications suivantes (et les réciproques sont fausses) :

$$\text{convergence normale} \Rightarrow \text{convergence uniforme} \Rightarrow \text{convergence simple}.$$

Remarque. Dans la pratique, il sera utile de penser à vérifier la convergence normale en première intention, pour simplifier l'étude. C'est le cas si $\|f_n\|_\infty$ se calcule aisément, notamment si les fonctions $|f_n|$ sont monotones sur I .

Exemples.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$. On étudie la convergence uniforme de la série $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc

$$\|f_n\|_\infty = f_n(0) = \frac{1}{1+n^2}.$$

Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge, donc $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

2. Revenons sur l'exemple déjà rencontré plus haut : la série de fonctions $\sum f_n$, où $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n!}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ (vers la fonction exp). Retrouvons que $\sum f_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[-a, a]$, où $a \in \mathbb{R}_+$:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|f_n\|_{\infty, [-a, a]} = f_n(a) = \frac{a^n}{n!}$. Comme $\frac{a^n}{n!}$ est le terme général d'une série convergente, la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge. Par conséquent, $\sum f_n$ converge normalement, donc converge uniformément sur $[-a, a]$.

3. On s'intéresse à la fonction

$$\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

- Il y a convergence simple de $\sum f_n$, où $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$, sur $I =]1, +\infty[$, donc ζ est bien définie sur I .
- Il y a convergence uniforme sur $I_a = [a, +\infty[$ pour tout $a > 1$:

Si $n \in \mathbb{N}$, on a par décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{n^x} = e^{-x \ln n}$:

$$\forall x \in I_a, \quad \left| \frac{1}{n^x} \right| \leq \frac{1}{n^a}, \quad \text{donc} \quad \|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^a}.$$

Comme $a > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^a}$ est convergente, donc par comparaison avec une série à termes positifs, $\sum \|f_n\|_\infty$ converge. Il y a alors convergence normale, donc uniforme sur I_a .



Montrer qu'il n'y a pas convergence normale

Pour montrer qu'une série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur I , on peut

- déterminer $\|f_n\|_\infty$, et montrer que la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ diverge,
- trouver une suite (x_n) de I telle que $\sum |f_n(x_n)|$ diverge⁴.

Exemples.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \mapsto xe^{-nx}$. La série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ mais pas normalement.
 - Si $x > 0$, alors $f_n(x) = x(e^{-x})^n$ est le terme général d'une série convergente, et $\sum f_n(0)$ converge, d'où la convergence simple sur $\mathbb{R}_+$.
 - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \frac{1}{n}$. La série $\sum f_n(x_n) = \sum \frac{e^{-1}}{n}$ diverge, donc il n'y a pas convergence normale sur $\mathbb{R}_+$.
2. Revenons sur l'exemple de la fonction ζ ci-dessus, et montrons qu'il n'y a pas convergence normale de la série de fonctions sur $]1, +\infty[$. On pose $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{n^{x_n}} = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} n^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} e^{-\frac{\ln n}{n}} \sim \frac{1}{n}.$$

4. Par contraposée, car s'il y a convergence normale, alors pour toute suite (x_n) de I , $\sum |f_n(x_n)| \leq \sum \|f_n\|_\infty$, et $\sum f_n(x_n)$ converge.

Ainsi, la série $\sum \frac{1}{n^{x_n}}$ diverge par comparaison avec une série de Riemann divergente. Il n'y a donc pas convergence normale.

Remarque. Pour montrer qu'une série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur I , les mêmes méthodes que pour les suites s'appliquent, on peut :

- déterminer $\|R_n\|_\infty$ et montrer qu'il n'y a pas convergence vers 0 (souvent peu aisé),
- déterminer une suite (x_n) de I telle que $(R_n(x_n))$ ne tend pas vers 0.



Cas des séries alternées de fonctions

Rappel. Critère des séries alternées : si (a_n) est une suite réelle décroissante de limite nulle, la série $\sum (-1)^n a_n$ est convergente, et si on note S_n ses sommes partielles et S sa somme, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| = |S - S_n| \leq |a_{n+1}|.$$

Séries alternées de fonctions. Lorsqu'une série de fonctions de la forme $\sum (-1)^n f_n$ est telle que pour tout $x \in I$, la série $\sum (-1)^n f_n(x)$ vérifie le critère des séries alternées, on a par le même critère

$$\forall x \in I, |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k f_k(x) \right| \leq |f_{n+1}(x)|.$$

En particulier, si (f_n) converge uniformément vers 0 sur I , alors $\|R_n\|_\infty \leq \|f_{n+1}\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, et $\sum (-1)^n f_n$ converge uniformément sur I .

Exemple. On considère la série de fonctions $\sum f_n$, où $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n x^n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, dont on sait qu'elle converge simplement sur $[0, 1]$ par le critère des séries alternées. Si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall x \in [0, 1], |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Par conséquent, $\|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

Remarque. En gardant les notations de l'exemple ci-dessus, on voit aisément que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$, donc $\sum \|f_n\|_\infty$ est divergente, et $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[0, 1]$.

On a donc obtenu un exemple de série de fonctions qui converge uniformément sur un intervalle, sans converger normalement.

2. Continuité, dérivabilité de la somme d'une série de fonction

Nous avons vu que les séries de fonctions ne sont autres que des suites de fonctions (la suite des fonctions sommes partielles). Ainsi, tous les résultats vus en première partie sont immédiatement transposables dans ce cadre.

Théorème - Continuité de la somme

Si $\sum f_n$ est une série de fonctions continues qui converge uniformément sur I , alors sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I .

Démonstration. Comme les fonctions f_n sont continues sur I , les fonctions $\sum_{k=0}^n f_k$ le sont également, et le résultat sur les suites de fonctions s'applique. $\square$

Remarque. Il arrive fréquemment qu'on n'ait pas convergence uniforme sur l'intervalle I considéré entier. Dans ce cas, comme pour le cas des suites de fonctions, il suffit de prouver qu'il y a localement convergence uniforme (sur tout segment par exemple), et d'en déduire la continuité sur I entier.

Le théorème de la double limite se réécrit immédiatement de la manière suivante dans le cadre des séries de fonctions, et fournit un résultat justifiant l'interversion d'une limite et d'une somme infinie.

Théorème – Théorème de la double limite – version séries de fonctions

Soient $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I et a un point adhérent à I . On suppose que

- la série de fonctions converge uniformément sur I ,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_n \in \mathbb{K}$.

Alors la série $\sum \ell_n$ converge et, en notant ℓ sa somme, on a $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$, c'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x).$$

Exemple. Cherchons à déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \frac{\arctan(nx)}{n^2}$.

- On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\|f_n\|_{\infty} \leq \frac{\pi}{2n^2}$, donc $\sum \|f_n\|_{\infty}$ est une série convergente. Ainsi, $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2n^2}$.

Ainsi, par le théorème de la double limite, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2n^2} = \frac{\pi^3}{12}$.

Théorème – Intégration terme à terme

Soient $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur un segment $[a, b]$, qui converge uniformément sur $[a, b]$. Alors $\sum \int_a^b f_n$ converge, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt.$$

Démonstration. Par le théorème d'interversion limite - intégrale sur un segment, comme $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{cvu}} S$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b S_n(t) dt = \int_a^b S(t) dt \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \int_a^b f_k(t) dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt. \quad \square$$

Remarque. Nous verrons d'autres résultats d'intégration terme à terme dans le chapitre INTÉGRALE SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE.

Théorème – Dérivation terme à terme

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, b]$ telle que

- ◊ la série de fonction $\sum f_n$ converge simplement sur $[a, b]$,
- ◊ la série de fonction $\sum f'_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Alors $\sum f_n$ converge uniformément, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.

Démonstration. Il s'agit d'une réécriture du théorème rencontré plus haut pour les suites de fonctions. $\square$

Remarque. Une conséquence est que si $\sum f_n$ vérifie les hypothèses du théorème sur un intervalle quelconque I , alors la somme S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n.$$