

Chapitre 5

Espaces vectoriels normés

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Nous allons chercher ici à donner un sens à la notion de convergence d'une suite dans un espace vectoriel. Dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, la convergence d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ équivaut à

$$|x - x_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Pour généraliser ceci, il s'agit de trouver une application de E dans $\mathbb{R}_+$ qui joue le rôle de $|\cdot|$ dans un espace vectoriel quelconque E . Une telle application est appelée une norme.

Dès lors, il conviendra d'être très prudent : en toute généralité, la notion de convergence dépendra de la norme qu'on aura choisie pour E . Nous verrons toutefois qu'en dimension finie, toute norme donne la même notion de convergence.

I Norme sur un espace vectoriel

1. Définition

Définition - Norme sur un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle norme sur E une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes.

- **Séparation.** $\forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$.
- **Homogénéité.** $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.
- **Inégalité triangulaire.** $\forall x, y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

L'espace vectoriel E muni de la norme N est appelé espace vectoriel normé, souvent noté (E, N) .

Remarque. Si (E, N) est un espace vectoriel normé

- On appelle *vecteur unitaire* tout vecteur de E de norme 1.
- Si $x \in E \setminus \{0_E\}$, alors $\frac{x}{\|x\|}$ est un vecteur unitaire.

Exemples.

- Sur $\mathbb{K}$, $|\cdot|$ définit une norme.
- Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_\infty = \max\{|x_i|, i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}.$$

Ainsi définies, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$.

Démonstration.

- $\|\cdot\|_1$:
- Si $x \in E, \|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n |x_i| = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |x_i| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.
 - Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E, \|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^n |\lambda x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^n |x_i| = |\lambda| \|x\|_1$.
 - Si $x, y \in E, \|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) = \|x\|_1 + \|y\|_1$.
- $\|\cdot\|_\infty$:
- Si $x \in E, \|x\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \max\{|x_i|, i \in \llbracket 1, n \rrbracket\} = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |x_i| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.
 - Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E, \|\lambda x\|_\infty = \max\{|\lambda x_i|, i \in \llbracket 1, n \rrbracket\} = |\lambda| \max\{|x_i|, i \in \llbracket 1, n \rrbracket\} = |\lambda| \|x\|_\infty$.
 - Si $x, y \in E, \|x + y\|_\infty = \max\{|x_i + y_i|, i \in \llbracket 1, n \rrbracket\} \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$. $\square$

Théorème - Inégalités triangulaires

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

- i. Si $x_1, \dots, x_n \in E$, alors $\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\|$.
- ii. Si $x, y \in E$, alors $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Démonstration.

- i. Par récurrence à partir de la propriété d'inégalité triangulaire de la norme.
- ii. Si $x, y \in E$, alors par inégalité triangulaire $\|x\| = \|x + y - y\| \leq \|x + y\| + \|y\|$, donc $\|x\| - \|y\| \leq \|x + y\|$. De même, $\|y\| - \|x\| \leq \|x + y\|$. $\square$

Théorème - Transfert

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, $\|\cdot\|_F$ une norme sur F et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire injective. Si pour tout $x \in E$, $\|x\|_E = \|\varphi(x)\|_F$, alors $\|\cdot\|_E$ définit une norme sur E .

Démonstration. La séparation provient de l'injectivité de φ : si $\|x\|_E = 0$, alors $\|\varphi(x)\|_F = 0$, donc $\varphi(x) = 0_F$, puis $x = 0_E$. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire découlent directement de la linéarité de φ . $\square$

2. Normes euclidiennes

On rappelle ici les notions d'espace préhilbertien, de produit scalaire, et de norme associée au produit scalaire, vues en première année.

Définition - Produit scalaire – Espace préhilbertien – Espace euclidien

Si E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, on appelle *produit scalaire* sur E une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E , c'est-à-dire une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$, qui est :

- *bilinéaire* : $\forall x, y, z \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$ et $\langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle$,
- *symétrique* : $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,
- *positive* : $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$,
- *définie* : $\forall x \in E, \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

Si E est muni d'un produit scalaire, on dit que E est un espace *préhilbertien*. Si de plus il est de dimension finie, on dit qu'il est *euclidien*.

Pour tout $x \in E$, on note $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Théorème - Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour tous $x, y \in E$,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration. Soient $x, y \in E$. On remarque déjà que si $x = 0_E$, alors l'inégalité est claire, et il y a même égalité. On suppose donc $x \neq 0_E$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\langle tx + y, tx + y \rangle = t^2 \|x\|^2 + 2t \langle x, y \rangle + \|y\|^2.$$

Ainsi, la fonction $f : t \mapsto \langle tx + y, tx + y \rangle$ est polynomiale de degré 2. Par ailleurs, par positivité du produit scalaire, f est de signe constant positif sur $\mathbb{R}$, donc le discriminant associé Δ est négatif. Ceci s'écrit

$$\Delta = 4 \langle x, y \rangle^2 - 4 \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0,$$

et donne directement l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Par ailleurs, s'il y a égalité le discriminant ci-dessus est nul, ce qui se traduit par l'existence d'un réel t_0 tel que

$f(t_0) = 0$, c'est-à-dire $\langle t_0x + y, t_0x + y \rangle = 0$. Ainsi, $t_0x + y = 0$, et les vecteurs x et y sont colinéaires. Réciproquement, si x et y sont colinéaires, il est clair qu'il y a égalité. $\square$

Remarque. On peut raffiner le cas d'égalité : on a $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\|$ si et seulement si x et y sont positivement liés¹, et on a $\langle x, y \rangle = -\|x\| \|y\|$ si et seulement si x et y sont négativement liés.

Théorème - Norme euclidienne

Si E un espace préhilbertien, alors $\|\cdot\|$ définit une norme sur E , appelée norme euclidienne.

Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire : $\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow x$ et y sont positivement liés.

Démonstration. La séparation provient directement du caractère défini du produit scalaire, et l'homogénéité provient de la bilinéarité du produit scalaire. Pour voir l'inégalité triangulaire, on remarque que par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

On obtient le résultat en composant par la fonction racine.

D'autre part, il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\|$, c'est-à-dire si et seulement si x et y sont positivement liés. $\square$

Exemples.

1. Sur $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique est défini par $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. La norme euclidienne associée est notée $\|\cdot\|_2$, et est donnée par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

En identifiant $\mathbb{R}^n$ à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit scalaire ci-dessus se réécrit $\langle X, Y \rangle = X^\top Y$, et la norme $\|X\|_2 = \sqrt{X^\top X}$.

2. Sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n , de base $\mathcal{B}$, on définit un produit scalaire en posant : $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, où $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ sont les coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}$. Alors

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \|\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)\|_2$$

définit la norme euclidienne associée.

3. Sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, le produit scalaire canonique est défini par : $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top B)$. La norme euclidienne associée est donnée par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \quad \|A\| = \sqrt{\text{tr}(A^\top A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j}^2}.$$

4. Sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, le produit scalaire canonique est défini par : $\forall f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$. La norme euclidienne associée est notée $\|\cdot\|_2$, et est donnée par :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}), \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt}.$$

3. Normes usuelles

Théorème - Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$

Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}, \quad \|x\|_\infty = \max\{|x_i|, i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}.$$

Ainsi définies, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$.

1. C'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $y = \lambda x$ ou $x = \lambda y$.

Démonstration. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique : $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la séparation et l'homogénéité sont directes, et si $x, y \in E$,

$$\|x + y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2 + 2|x_i||y_i| + |y_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^2} \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$$

en utilisant l'inégalité triangulaire dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ pour $(|x_1|, \dots, |x_n|)$ et $(|y_1|, \dots, |y_n|)$.

Par ailleurs, nous avons déjà vu que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$. □

Théorème – Normes usuelles sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie

Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et de base $\mathcal{B}$, on pose pour tout $x \in E$, dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont notées $(x_1, \dots, x_n)$,

$$\|x\|_{\mathcal{B},1} = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_{\mathcal{B},2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}, \quad \|x\|_{\mathcal{B},\infty} = \max\{|x_i|, i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}.$$

En d'autres termes, $\|x\|_{\mathcal{B},1} = \|\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)\|_1$, $\|x\|_{\mathcal{B},2} = \|\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)\|_2$ et $\|x\|_{\mathcal{B},\infty} = \|\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)\|_\infty$.

Ainsi définies, $\|\cdot\|_{\mathcal{B},1}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{B},2}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{B},\infty}$ sont des normes sur E .

Démonstration. On applique le résultat de transfert avec la fonction $\text{Mat}_{\mathcal{B}}$, qui est linéaire et injective de E dans $\mathbb{K}^n$. □

Théorème – Normes usuelles sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose

$$\|M\|_1 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|, \quad \|M\|_2 = \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|^2}, \quad \|M\|_\infty = \max\{|a_{i,j}|, i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket\}.$$

Ainsi définies, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. Il s'agit des normes $\|\cdot\|_{\mathcal{B},1}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{B},2}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{B},\infty}$ comme définies ci-dessus, où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. □

Théorème – Normes usuelles sur les espaces de fonctions continues

Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$, on pose

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}, \quad \|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|, t \in [a, b]\}.$$

Ainsi définies, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$.

Démonstration. On note $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$.

$\|\cdot\|_1$: – Si $f \in E$, alors $\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow \int_a^b |f| = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [a, b], |f(t)| = 0 \Leftrightarrow f = 0_E$.

– Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in E$, $\|\lambda f\|_1 = \int_a^b |\lambda f| = |\lambda| \int_a^b |f| = |\lambda| \|f\|_1$.

– Si $f, g \in E$, $\|f + g\|_1 = \int_a^b |f + g| \leq \int_a^b |f| + |g| = \|f\|_1 + \|g\|_1$.

$\|\cdot\|_2$: Il s'agit de la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique sur E : $\langle f, g \rangle = \int_a^b fg$.

$\|\cdot\|_\infty$: – Si $f \in E$, $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [a, b], |f(t)| = 0 \Leftrightarrow f = 0_E$.

2. La continuité de f est cruciale ici.

- Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in E$, $\|\lambda f\|_\infty = \sup\{|\lambda f(t)|, t \in [a, b]\} = |\lambda| \sup\{|f(t)|, t \in [a, b]\} = |\lambda| \|f\|_\infty$.
- Si $f, g \in E$, $\|f + g\|_\infty \leq \sup_{[a, b]}(|f| + |g|) \leq \sup_{[a, b]} |f| + \sup_{[a, b]} |g| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. $\square$

Remarque. On notera que par le théorème des bornes atteintes, si $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$, alors la borne supérieure $\|f\|_\infty$ est atteinte, on peut donc écrire max au lieu de sup dans ce cas.

Théorème - Norme usuelle sur les espaces de fonctions bornées

Si E est un espace vectoriel normé et X est un ensemble quelconque, on note $\mathcal{F}_b(X, E)$ l'ensemble des fonctions bornées de X dans E , c'est-à-dire l'ensemble des fonctions $f : X \rightarrow E$ telles que

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in X, \|f(x)\| \leq M.$$

Muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ donnée par : $\forall f \in \mathcal{F}_b(X, E)$, $\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\|, x \in X\}$, $\mathcal{F}_b(X, E)$ est un espace vectoriel normé.

Démonstration. On vérifie sans peine que $\mathcal{F}_b(X, E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(X, E)$. On montre que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme comme dans le cas de $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$. $\square$

4. Distance, boules ouvertes et fermées, convexité

La définition ci-dessous généralise la notion de distance définie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ à l'aide de $|\cdot|$.

Définition - Distance associée à une norme

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On appelle distance associée à la norme $\|\cdot\|$ l'application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ donnée par

$$\forall (x, y) \in E \times E, d(x, y) = \|x - y\|.$$

Théorème - Propriétés de la distance

Si $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, alors la distance d associée à $\|\cdot\|$ vérifie les propriétés suivantes.

- i. **Symétrie.** $\forall x, y \in E, d(x, y) = d(y, x)$.
- ii. **Séparation.** $\forall x, y \in E, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- iii. **Inégalité triangulaire.** $\forall x, y, z \in E, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Remarque. On peut définir la notion générale de distance indépendamment de la définition de norme, comme une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les trois propriétés ci-dessus. Certaines distances en ce sens ne peuvent pas être associées à une norme.

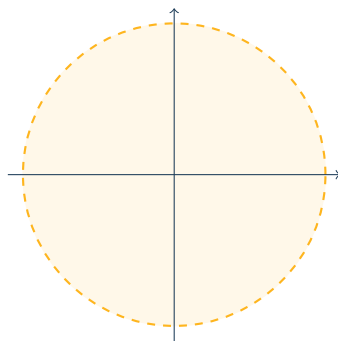
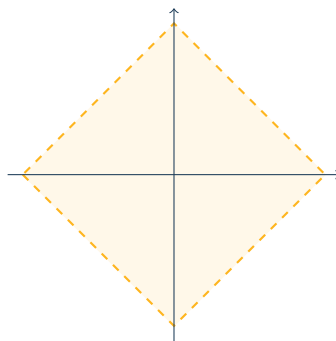
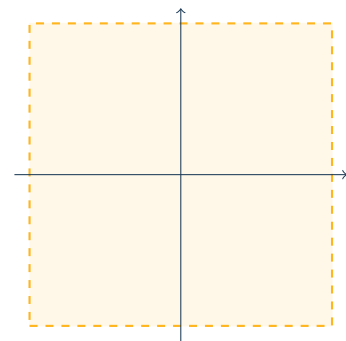
Définition - Boules ouvertes, boules fermées, sphères

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $x \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

- On appelle *boule ouverte* de centre x et de rayon r l'ensemble $B(x, r) = \{y \in E, \|y - x\| < r\}$.
- On appelle *boule fermée* de centre x et de rayon r l'ensemble $\overline{B}(x, r) = \{y \in E, \|y - x\| \leq r\}$.
- On appelle *sphère* de centre x et de rayon r l'ensemble $S(x, r) = \{y \in E, \|y - x\| = r\}$.

Si $x = 0_E$ et $r = 1$, on parle de boule unité, ou de sphère unité.

Remarque. Les boules dépendent bien sûr du choix de la norme. Lorsqu'il y a ambiguïté, on précise parfois la norme en notant $B_{\|\cdot\|}(x, r)$.

Boule unité $B_{\|\cdot\|_2}(0, 1)$ Boule unité $B_{\|\cdot\|_1}(0, 1)$ Boule unité $B_{\|\cdot\|_\infty}(0, 1)$

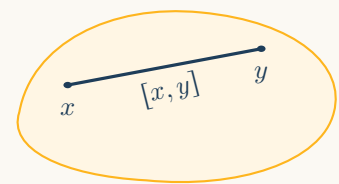
Définition - Segments, parties convexes

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

- Si $x, y \in E$, on appelle segment d'extrémités x, y l'ensemble

$$[x, y] = \{(1 - \lambda)x + \lambda y, \lambda \in [0, 1]\}.$$

- On dit que $A \subset E$ est convexe si pour tous $x, y \in A$, $[x, y] \subset A$.



Théorème - Convexité des boules

Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, alors ses boules ouvertes et ses boules fermées sont convexes.

Démonstration. Soient $B = B(a, r)$ une boule ouverte de E de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$. Si $x, y \in B$ et $\lambda \in [0, 1]$, alors en remarquant que $a = (1 - \lambda)a + \lambda a$,

$$\begin{aligned} \|(1 - \lambda)x + \lambda y - a\| &= \|(1 - \lambda)(x - a) + \lambda(y - a)\| \leq \|(1 - \lambda)(x - a)\| + \lambda\|y - a\| = (1 - \lambda)\|x - a\| + \lambda\|y - a\| \\ &< (1 - \lambda)r + \lambda r = r. \end{aligned}$$

Ainsi, $(1 - \lambda)x + \lambda y \in B$, et on a bien montré que $[x, y] \subset B$. De même pour une boule fermée. $\square$

Définition - Parties bornées

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $A \subset E$. On dit que A est bornée dans E si et seulement s'il A est contenu dans une boule de E . Autrement dit :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in A, \|x\| \leq M.$$

5. Norme sur un espace produit

Définition-théorème - Norme produit

Soient $E_1, \dots, E_k$ des espaces vectoriels, munis respectivement des normes $N_1, \dots, N_k$. On définit une norme sur $E_1 \times \dots \times E_k$, appelée norme produit, en posant

$$\forall x = (x_1, \dots, x_k) \in E_1 \times \dots \times E_k, \quad N(x) = \max\{N_i(x_i), i \in [1, k]\}.$$

Démonstration. La preuve est la même que ci-dessus pour $\|\cdot\|_\infty$ dans $\mathbb{K}^n$. $\square$

II Suites dans un espace vectoriel normé

1. Suite convergente

Définition - Suite convergente dans un espace vectoriel normé

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E et $x \in E$. On dit que la suite (x_n) converge vers x dans E si $\|x_n - x\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, autrement dit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Remarques.

- Comme pour les suites réelles ou complexes, l'inégalité stricte de la définition peut être remplacée par une inégalité large.
- S'il existe $x \in E$ telle que (x_n) converge vers x , la suite est dite convergente et on dit que x est la limite de (x_n) , ce qu'on note $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$. Sinon, on dit que (x_n) est dite divergente.

⚠ La notion de convergence dépend a priori de la norme choisie sur E . Nous verrons qu'en dimension infinie, une suite peut converger pour une norme et diverger pour une autre. Si besoin, on précise la norme pour la convergence :

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|} x.$$

Exemple. On se place sur $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, et on considère la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : x \mapsto x^n$.

- Si on munit E de la norme $\|\cdot\|_1$: comme pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1},$$

on a $\|f_n\|_1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, donc (f_n) converge vers la fonction nulle de E pour la norme $\|\cdot\|_1$.

- Si on munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|f_n\|_\infty = 1$, donc (f_n) ne converge pas vers la fonction nulle pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Remarque. Si (f_n) est la suite de l'exemple ci-dessus, alors on peut montrer que (f_n) diverge pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

En effet, si (f_n) converge vers $f \in E$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, alors sa sous-suite (f_{2n}) converge également vers f , ce qui entraîne que, si on pose $g_n = f_n - f_{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors (g_n) converge vers la fonction nulle.

Or pour $n \in \mathbb{N}$, une étude de fonction montre que $|g_n|$ est maximale en $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{n}}$, donc $\|g_n\|_\infty = g_n\left((\frac{1}{2})^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{4}$. Par conséquent, $\|g_n\|_\infty \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, ce qui contredit la convergence de (g_n) vers la fonction nulle.

Théorème - Unicité de la limite

Si (x_n) est une suite convergente d'un espace vectoriel normé, alors sa limite est unique.

Démonstration. La preuve est la même que dans le cas réel ou complexe. □

Définition - Suite bornée

On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| \leq M.$$

Théorème - Une suite convergente est bornée

Si (x_n) est une suite convergente d'un espace vectoriel normé, alors (x_n) est bornée.

Démonstration. Si (x_n) converge vers x , alors par définition il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$, on a $\|x_n - x\| < 1$, donc par inégalité triangulaire $\|x_n\| < 1 + \|x\|$. Ainsi, $(\|x_n\|)$ est bornée à partir d'un certain rang, donc bornée. □

Théorème - Suites convergentes dans un espace produit

Soient $E_1, \dots, E_k$ des espaces vectoriels, munis respectivement des normes $N_1, \dots, N_k$, et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $E_1 \times \dots \times E_k$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = (x_n^1, \dots, x_n^k)$.

La suite (X_n) converge vers $X = (x_1, \dots, x_k) \in E_1 \times \dots \times E_k$ pour la norme produit N si et seulement s'il y a convergence coordonnée par coordonnée, autrement dit :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{N} X \iff \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, x_n^i \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x_i.$$

Démonstration. Par définition de la norme produit N , on a

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{N} X \iff N(X_n - X) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \iff \max_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket} N_i(x_n^i - x_i) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \iff \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, x_n^i \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x_i. \quad \square$$

Théorème - Limites et opérations

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé, et (x_n) , (y_n) des suites convergentes de E de limites x et y , et (λ_n) une suite convergente de $\mathbb{K}$ de limite λ .

- La suite $(x_n + y_n)$ converge, et $x_n + y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x + y$.
- La suite $(\lambda_n x_n)$ converge, et $\lambda_n x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda x$.

Démonstration. La preuve est la même que dans le cas réel ou complexe. $\square$

Théorème - Convergence et produit

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé muni d'un produit $(x, y) \mapsto xy$ tel que

- le produit est bilinéaire,
- il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tous $x, y \in E$, $\|xy\| \leq k\|x\|\|y\|$.

Alors, si (x_n) , (y_n) des suites convergentes de E de limites x et y , la suite $(x_n y_n)$ converge vers xy .

Démonstration. Si (x_n) , (y_n) des suites convergentes de E de limites x et y , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|x_n y_n - xy\| &= \|x_n(y_n - y) + (x_n - x)y\| \leq \|x_n(y_n - y)\| + \|(x_n - x)y\| \\ &\leq k(\|x_n\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\|). \end{aligned}$$

Ainsi, comme (x_n) est bornée car convergente, on déduit de la convergence de (x_n) et (y_n) que $\|x_n y_n - xy\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. $\square$

Remarque. Le résultat s'applique donc à toute $\mathbb{K}$ -algèbre, comme par exemple $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, si elle est munie d'une norme dite d'algèbre, c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in E, \|xy\| \leq \|x\|\|y\|.$$

2. Suites extraites et valeurs d'adhérence**Définition - Suite extraite**

Soient E un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E . On appelle *suite extraite*, ou sous-suite, de (x_n) une suite de la forme $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Remarques.

- Une fonction $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante est aussi appelée une extractrice.
- On rappelle que si φ est une extractrice, alors $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition - Valeurs d'adhérence

Soient E un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E . On appelle *valeur d'adhérence* de (x_n) la limite d'une sous-suite convergente de (x_n) .

Exemples.

- La suite $(\sin(n^2))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$, d'extractrice $\varphi : n \mapsto n^2$.
- Si $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet 1 et -1 pour valeurs d'adhérence : ce sont les limites respectives des sous-suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

Théorème - Convergence, suites extraites, valeurs d'adhérence

Soient E un espace vectoriel normé et (x_n) une suite de E qui converge vers $x \in E$. Alors

- toute sous-suite de (x_n) converge vers x ,

- la suite (x_n) a pour seule valeur d'adhérence x .

Démonstration.

- On considère une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ de (x_n) . Soit $\varepsilon > 0$, on sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, \|x_n - x\| < \varepsilon$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, on a $\varphi(n) \geq n \geq N$, donc on a aussi $\|x_{\varphi(n)} - x\| < \varepsilon$, d'où $x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.
- Tout d'abord, x est valeur d'adhérence comme limite de la suite (x_n) . Comme toute sous-suite converge vers x d'après la point précédent, c'est la seule valeur d'adhérence. $\square$

Remarque. En particulier, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui n'a pas de limite, ou admet deux valeurs d'adhérence distinctes, alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Exemple. La suite $u_n = (-1)^n$ a pour valeurs d'adhérence -1 et 1 , donc elle diverge.

! Une suite (x_n) qui n'a qu'une seule valeur d'adhérence ne converge pas toujours. Par exemple la suite réelle $(n(1 + (-1)^n))$ a pour seule valeur d'adhérence 0 , mais diverge.

Théorème - Théorème de Bolzano-Weierstrass sur $\mathbb{C}$

Toute suite complexe bornée a une sous-suite convergente.

Démonstration. Le cas réel se montre par exemple par dichotomie (voir cours MPSI).

Montrons le cas complexe. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \Re u_n$ et $b_n = \Im u_n$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|\Re u_n| \leq |u_n|$ et $|\Im u_n| \leq |u_n|$, les suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées.

- On peut appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass à la suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et on obtient qu'il existe une sous-suite $(a_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge.
- La suite $(b_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée comme sous-suite de $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donc on peut en extraire une sous-suite $(b_{\varphi(\psi(n))})_{n \in \mathbb{N}}$ convergente.

On remarque ensuite que la suite $(a_{\varphi(\psi(n))})_{n \in \mathbb{N}}$ converge comme sous-suite de $(a_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$. Ainsi, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{\varphi(\psi(n))} = a_{\varphi(\psi(n))} + i b_{\varphi(\psi(n))}$, la suite $(u_{\varphi(\psi(n))})_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite convergente de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. $\square$

Remarque. Le procédé dans la démonstration pour extraire des sous-suites de deux suites (x_n) et (y_n) à l'aide de la même extractrice est à retenir. On extrait une suite $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n) , puis on extrait une suite $(y_{\varphi(\psi(n))})$ de $(y_{\varphi(n)})$. Finalement, les suites $(x_{\varphi(\psi(n))})$ et $(y_{\varphi(\psi(n))})$ sont des sous-suites respectives de (x_n) et (y_n) . On parle d'*extraction diagonale*.

Ce procédé s'avère parfois fort utile, et peut se généraliser facilement au cas de k suites, et même au cas d'une suite de suites, avec une adaptation cependant.

Remarque. Si (u_n) une suite bornée de $\mathbb{C}$ admettant une unique valeur d'adhérence, alors elle converge.

Démonstration. On considère une suite (u_n) bornée qui admet une unique valeur d'adhérence x . Supposons que (u_n) ne converge pas vers x . Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $\|u_n - x\| \geq \varepsilon$. Ceci permet de construire par récurrence une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_{\varphi(n)} - x\| \geq \varepsilon$.

La suite $(u_{\varphi(n)})$ étant bornée, le théorème de Bolzano-Weierstrass assure qu'elle admet une sous-suite $(u_{\varphi(\psi(n))})$ qui converge, on note y sa limite. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_{\varphi(\psi(n))} - x\| \geq \varepsilon$, on a par passage à la limite $\|y - x\| \geq \varepsilon$, donc $x \neq y$. Finalement, y est une autre valeur d'adhérence de (u_n) , et il y a contradiction. $\square$

III Comparaison de normes

Définition - Normes équivalentes

Soient E un espace vectoriel et N_1, N_2 deux normes sur E . Les normes N_1 et N_2 sont dites *équivalentes* s'il existe

des réels $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$\forall x \in E, \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x).$$

Remarque. On vérifie aisément que la relation donnée par : $N_1 \sim N_2$ si et seulement si N_1 et N_2 sont équivalentes est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes de E .

Exemple. Sur $\mathbb{K}^n$, les normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes : si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\diamond \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty = \sqrt{n} \|x\|_\infty.$$

$$\diamond \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \geq \sqrt{\|x\|_\infty^2} = \|x\|_\infty.$$

Ainsi, on a $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq \sqrt{n} \|\cdot\|_\infty$, ce qui donne bien l'équivalence des normes. Nous verrons que ce résultat est en fait bien plus général.

Théorème - Équivalence et suites convergentes, suites bornées

Soient E un espace vectoriel normé et N_1, N_2 deux normes équivalentes sur E . Alors,

- une suite de E est convergente pour N_1 si et seulement si elle est convergente pour N_2 , et a même limite,
- une suite de E est bornée pour N_1 si et seulement si elle est bornée pour N_2 .

Démonstration. Comme N_1 et N_2 sont équivalentes, on peut considérer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ tels que $\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1$. Pour chacun des deux points, une implication seule suffit car N_1 et N_2 jouent des rôles symétriques.

- Supposons que la suite (x_n) de E converge vers x pour la norme N_1 . Alors $N_2(x_n - x) \leq \beta N_1(x_n - x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc par comparaison $N_2(x_n - x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui donne que (x_n) converge vers x pour la norme N_2 .
- Si (x_n) est une suite bornée pour N_1 , il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N_1(x_n) \leq M$. Ceci implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N_2(x_n) \leq \beta M$, donc (x_n) est bornée pour N_2 . $\square$

Le résultat ci-dessus fournit immédiatement, par contraposée, un moyen de montrer que deux normes ne sont pas équivalentes.



Montrer que deux normes ne sont pas équivalentes

Pour montrer que deux normes N_1 et N_2 sur un espace vectoriel E ne sont pas équivalentes, on peut par exemple :

- montrer qu'il existe une suite (x_n) de E qui converge pour N_1 mais pas pour N_2 ,
- montrer qu'il existe une suite (x_n) de E qui est bornée pour N_1 mais pas pour N_2 .

Exemple. On a vu plus haut que si $f_n : x \mapsto x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_1} 0, \quad \text{mais } (f_n) \text{ ne converge pas vers } 0 \text{ pour } \|\cdot\|_\infty.$$

Ainsi, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas des normes équivalentes.

Exercice 1. On se place sur $E = \mathbb{C}[X]$. Pour tout $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on pose

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|, \quad N_2(P) = \int_0^1 |P(t)| dt, \quad N_3(P) = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|.$$

1. Montrer que N_1, N_2, N_3 sont des normes sur E .
2. Étudier leur équivalence.

Théorème - Équivalence des normes en dimension finie

Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

Démonstration. Voir plus tard. $\square$

IV Séries vectorielles dans un espace de dimension finie

Comme nous avons défini la notion de suite convergente dans un espace vectoriel normé, il est naturel que l'on puisse également étendre la notion de série, et de série convergente.

Définition – Série dans un espace vectoriel normé

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E . On appelle série de terme général x_n et on note $\sum x_n$ la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n x_k$$

On dit que la série $\sum x_n$ converge vers $x \in E$ si la suite (S_n) converge vers x dans E , on note $x = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.

Remarque. On note bien qu'en dimension finie, comme les normes sont équivalentes, la convergence d'une série ne dépend pas du choix de la norme sur E . On pourra donc selon les cas choisir la norme la plus adaptée.

Le résultat ci-dessous assure qu'en dimension finie, la convergence absolue entraîne la convergence d'une série, comme dans le cas des séries numériques.

Théorème – Convergence absolue et convergence

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie et $\sum x_n$ une série de E . On dit que $\sum x_n$ converge absolument si

$$\sum \|x_n\| \text{ converge.}$$

Dans ce cas, la série $\sum x_n$ converge.

Démonstration. On note $N = \dim E$, et on considère une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_N)$ une base de E , et on muni E de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{B}, \infty}$: pour tout $x \in E$,

$$\|x\|_{\mathcal{B}, \infty} = \max\{|\alpha_i|, i \in \llbracket 1, N \rrbracket\},$$

où $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_N e_N$. Les normes étant équivalentes en dimension finie, la série $\sum \|x_n\|_{\mathcal{B}, \infty}$ converge, et il suffit de montrer que $\sum x_n$ converge pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{B}, \infty}$.

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $(x_n^1, \dots, x_n^N)$ les coordonnées de x_n dans la base $\mathcal{B}$, alors

$$\sum_{k=0}^n x_k = \left(\sum_{k=0}^n x_k^1 \right) e_1 + \dots + \left(\sum_{k=0}^n x_k^N \right) e_N, \quad \text{donc} \quad \left\| \sum_{k=0}^n x_k \right\|_{\mathcal{B}, \infty} = \max \left\{ \left| \sum_{k=0}^n x_k^i \right|, i \in \llbracket 1, N \rrbracket \right\}.$$

Si $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on a $|x_n^i| \leq \|x_n\|_{\mathcal{B}, \infty}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $\sum \|x_n\|_{\mathcal{B}, \infty}$ converge, on déduit que $\sum |x_n^i|$ converge, par comparaison de séries à termes positifs.

Finalement, la suite des sommes partielles de $\sum x_n$ converge, comme max d'un nombre fini de suites convergentes. $\square$

Théorème – Exponentielle de matrice, exponentielle d'endomorphisme

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La série $\sum \frac{A^k}{k!}$ est convergente. Sa somme est appelée exponentielle de A , et notée $\exp(A)$, ou encore e^A .

Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$, la série $\sum \frac{u^k}{k!}$ est convergente. On appelle sa somme exponentielle de u , et on la note $\exp(u)$.

Démonstration. Nous nous contentons de prouver le résultat pour les matrices. Remarquons pour commencer que comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie, les normes sont toutes équivalentes. Nous choisissons une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est une norme d'algèbre³ :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

3. Nous avons vu en TD que de telles normes existent en étudiant une norme subordonnée, nous en reparlerons plus en détail dans un chapitre à venir.

Ainsi, par récurrence immédiate, on a $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui entraîne que $\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| = \frac{\|A^k\|}{k!} \leq \frac{\|A\|^k}{k!}$. Comme la série $\sum \frac{\|A\|^k}{k!}$ converge (vers $e^{\|A\|}$), la série $\sum \frac{\|A^k\|}{k!}$ converge absolument par comparaison de séries à termes positifs. $\square$

A. Rappels sur les bornes supérieures

On rappelle que toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure, c'est-à-dire un plus petit majorant, noté $\sup A$.

Ainsi, si $A \subset \mathbb{R}$ est non vide et majorée, alors : $\sup A \leq M \Leftrightarrow M$ est un majorant de A .

Autrement dit :

$$\sup A \leq M \Leftrightarrow \forall x \in A, x \leq M.$$

Remarques.

- On retiendra que pour montrer que $\sup A \leq M$, il suffit de montrer que M majore A .
- Si de plus $M \in A$, alors $\sup A = M$, on a alors $\sup A = \max A$.

Théorème - Caractérisation séquentielle des bornes supérieure et inférieure

- Si une partie A de $\mathbb{R}$ est non vide et majorée, alors

$$M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A, \\ \text{il existe une suite d'éléments de } A \text{ qui converge vers } M. \end{cases}$$

- A n'est pas majorée si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui diverge vers $+\infty$.



Remarque. Pour montrer que $\sup A \geq M$, il suffit donc de trouver une suite de A qui converge vers M .