

## Chapitre 4

## Séries – Familles sommables

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## I Rappels et compléments sur les séries numériques

## 1. Généralités

**Définition - Série**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ . On appelle *série* de terme général  $u_n$  et on note  $\sum u_n$  la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

On dit que la série  $\sum u_n$  est convergente si  $(S_n)_n$  converge. On note alors sa limite  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  et on l'appelle *somme de la série*. On appelle également *reste d'ordre  $n$*  de la série

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^n u_k, \quad \text{de sorte que} \quad R_n = S - S_n.$$

**Remarques.**

- Pour toute série  $\sum u_n$ , de sommes partielles notées  $S_n$ , on peut écrire pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$S_n - S_{n-1} = u_n.$$

- La nature de la série  $\sum u_n$  ne change pas si l'on modifie un nombre fini de termes de la suite  $(u_n)$ .
-  On veillera à ne pas confondre  $\sum u_n$ ,  $\sum_{k=0}^n u_k$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .

**Exemple.**  $\sum \frac{1}{n(n+1)}$  est convergente, de somme 1 : on a  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

**Théorème - Divergence grossière**

Si  $\sum u_n$  converge, alors la suite  $(u_n)_n$  converge vers 0.

Ainsi, si  $u_n \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , alors  $\sum u_n$  diverge. On dit alors que  $\sum u_n$  diverge grossièrement.

**Démonstration.** Si  $\sum u_n$  converge, la suite  $(S_n)_n$  converge vers un réel  $S$ . Ainsi,  $u_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S - S = 0$ .  $\square$

 La réciproque est fautive ! On peut avoir  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , mais  $\sum u_n$  diverge. Par exemple,  $\sum \frac{1}{n}$  diverge.

**Série harmonique.** La série  $\sum \frac{1}{n}$ , dite *série harmonique* est divergente.

**Démonstration.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

car pour tout  $k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$ ,  $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$ . Si la suite  $(H_n)$  convergerait vers un réel  $H$ , on aurait

$H_{2n} - H_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} H - H = 0$ , ce qui n'est pas vrai d'après ce qui précède. Ainsi, la série diverge.  $\square$

### Théorème - Lien suites-séries

Soit  $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .

La suite  $(u_n)$  est de même nature que la série  $\sum (u_{n+1} - u_n)$ .

**Démonstration.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0.$$

Ainsi, la suite  $\left(\sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k)\right)$  est de même nature que la suite  $(u_{n+1})$ , donc de même nature que  $(u_n)$ .  $\square$

**Remarque.** Ce résultat est souvent utilisé, dans un sens comme dans l'autre : pour déterminer la nature d'une suite à partir d'une série, ou d'une série à partir d'une suite.

### Théorème - Séries et opérations

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ , et  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ .

– Si les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergent, alors  $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$  converge également, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

– Si  $\sum u_n$  converge et  $\sum v_n$  diverge, alors  $\sum(u_n + v_n)$  diverge.

– Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  : la série  $\sum u_n$  converge si et seulement si  $\sum \Re u_n$  et  $\sum \Im u_n$  convergent.

**⚠** Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  divergent, on ne peut rien en déduire sur la nature de  $\sum(u_n + v_n)$ . Par exemple,  $\sum \frac{1}{n}$  et  $\sum -\frac{1}{n}$  sont divergentes, mais  $\sum(\frac{1}{n} - \frac{1}{n})$  converge.

## 2. Séries géométriques

### Théorème - Séries géométriques

Si  $x \in \mathbb{K}$ , la série  $\sum x^n$ , dite *série géométrique*, converge si et seulement si  $|x| < 1$ . Dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

**Démonstration.**

– Si  $|x| \geq 1$ , alors  $(|x|^n)$  ne converge pas vers 0, donc la série diverge grossièrement.

– Si  $|x| < 1$ , alors  $S_n = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-x}$ , donc la série converge et sa somme est  $\frac{1}{1-x}$ .  $\square$

**Remarque.** Plus généralement, si  $|x| < 1$  et  $n_0 \in \mathbb{N}$ , alors  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x^n = \frac{x^{n_0}}{1-x}$ .

$$\text{En effet, } \sum_{k=n_0}^{+\infty} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k - S_{n_0-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n_0}}{1-x} = \frac{x^{n_0}}{1-x}.$$

**Exemple.** La série  $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ , converge, et sa somme vaut  $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ .

### 3. Comparaison série-intégrale, séries de Riemann

Afin de déterminer la nature d'une série ou de trouver un équivalent des sommes partielles (ou des restes), il est parfois utile de comparer une série à une intégrale.

Ceci est possible lorsque la série s'écrit  $\sum f(n)$ , où  $f$  est une fonction monotone, continue. Nous considérerons le cas où  $f$  est décroissante ici, le cas croissant étant une simple adaptation.

#### Théorème - Comparaison série-intégrale

Si  $f$  est une fonction par morceaux réelle continue, positive, décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ , alors pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\forall n \geq p, \quad \int_{p+1}^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=p+1}^n f(k) \leq \int_p^n f(t) dt.$$

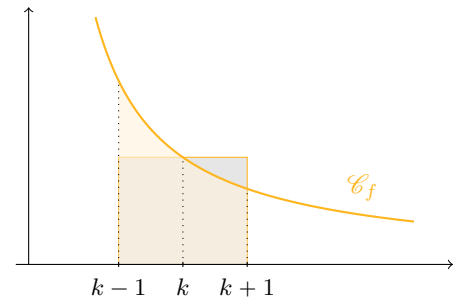
**Démonstration.** Pour tout  $k > p$ ,

- comme pour tout  $x \in [k-1, k]$ ,  $f(k) \leq f(x)$ ,

$$\int_{k-1}^k f(k) dx \leq \int_{k-1}^k f(x) dx, \quad \text{donc} \quad f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx.$$

- comme pour tout  $t \in [k, k+1]$ ,  $f(t) \leq f(k)$ ,

$$\int_k^{k+1} f(x) dx \leq \int_k^{k+1} f(k) dx, \quad \text{donc} \quad \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k).$$



Finalement, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt.$$

En sommant ces inégalités pour  $k \in \llbracket p+1, n \rrbracket$ , on obtient le résultat.  $\square$

**Remarque.** Dans le cas où la fonction  $f$  est croissante, les inégalités sont dans l'autre sens.

#### Corollaire

Si  $f$  est une fonction réelle continue, positive, décroissante sur  $\mathbb{R}_+$  et  $a \in \mathbb{R}_+$ , alors

$$\sum f(n) \text{ est de même nature que la suite } \left( \int_a^n f(t) dt \right).$$

**Démonstration.**

- Si  $\left( \int_a^n f(t) dt \right)$  converge, alors la série à termes positifs  $\sum f(n)$  a ses sommes partielles majorées d'après l'inégalité du théorème, donc elle converge.
- Si  $\left( \int_a^n f(t) dt \right)$  diverge, alors l'inégalité du théorème entraîne par minoration que  $\sum f(n)$  a ses suites partielles qui divergent, donc elle diverge.  $\square$

#### Théorème - Séries de Riemann

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La série  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ , dite de Riemann, converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

**Démonstration.** La fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$  est continue, décroissante, positive sur  $[1, +\infty[$ .

- Cas  $\alpha = 1$  : ce résultat est déjà traité, mais nous allons le montrer avec une comparaison série intégrale

$$\int_1^n \frac{dt}{t} dx = [\ln t]_1^n = \ln n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty, \quad \text{donc} \quad \sum \frac{1}{n} \text{ diverge.}$$

– Cas  $\alpha \neq 1$  : On a

$$\int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \left[ \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^n = \frac{n^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}.$$

Ainsi,  $(\int_a^n f(t) dt)$  diverge si  $\alpha < 1$ , et converge si  $\alpha > 1$ . On conclut alors par comparaison série intégrale.  $\square$

**Exercice 1.** *Série de Bertrand.* Montrer que la série  $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$  converge si et seulement si  $\beta > 1$ .

On pensera à l'utilisation de la comparaison série intégrale dans la recherche d'équivalent de sommes partielles ou de restes. Nous verrons par ailleurs une autre technique plus loin.

**Exemple.** Déterminons un équivalent de  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Par décroissance de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ , on a pour tout  $m > n$  :

$$\int_{n+1}^{m+1} \frac{dx}{x^2} \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k^2} \leq \int_n^m \frac{dx}{x^2}, \quad \text{donc} \quad \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{m}$$

En laissant tendre  $m$  vers  $+\infty$ , on obtient alors

$$\frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}.$$

Cet encadrement entraîne que  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$ .

Plus généralement, on montre avec la même méthode les équivalents suivants (à faire en exercice).

**Équivalence des restes ou des sommes partielles pour les séries de Riemann (HP).**

$$\text{Si } \alpha < 1, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n, \quad \text{si } \alpha > 1, \quad \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

#### 4. Comparaison des séries à termes positifs

##### Théorème – Nature des séries à termes positifs

Si  $\sum u_n$  est une série à termes positifs, alors la suite  $(S_n)$  de ses sommes partielles est croissante, et

$$\sum u_n \text{ converge} \Leftrightarrow (S_n) \text{ est majorée.}$$

Si  $\sum u_n$  diverge, alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ .

**Démonstration.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$  donc  $(S_n)$  est croissante. Le théorème de la limite monotone donne alors que  $(S_n)$  converge si et seulement si elle est majorée, et diverge vers  $+\infty$  sinon.  $\square$

**Remarques.**

- En cas de divergence, seulement dans le cas d'une série à termes positifs, on notera parfois  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$ .
- Si  $\sum u_n$  à termes positifs est convergente de somme  $S$ , alors  $S_n \leq S$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Théorème – Comparaison des séries à termes positifs**

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs telles que  $u_n \leq v_n$  à partir d'un certain rang.

- i. Si  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  converge et on a  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ .
- ii. Si  $\sum u_n$  diverge, alors  $\sum v_n$  diverge.

⚠ Le résultat est faux si les séries ne sont pas à termes positifs. Par exemple, si  $u_n = -n$  et  $v_n = 0$  pour tout  $n$ ,  $\sum u_n$  diverge et  $\sum v_n$  converge.

**Démonstration.** Si  $u_n \leq v_n$  pour tout  $n \geq n_0$ , alors les sommes partielles vérifient :  $\sum_{k=n_0}^n u_k \leq \sum_{k=n_0}^n v_k$ . Le résultat découle alors du théorème de comparaison appliqué aux suites des sommes partielles.  $\square$

**5. Séries absolument convergentes****Définition – Série absolument convergente**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ . La série  $\sum u_n$  est dite *absolument convergente* si la série  $\sum |u_n|$  converge.

**Exemple.** La série  $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$  est absolument convergente car  $\sum \frac{1}{n^2}$  est convergente.

**Théorème – Convergence d'une série absolument convergente**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ . Si la série  $\sum u_n$  est absolument convergente, alors elle est convergente. Dans ce cas, on a

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

**Démonstration.**

- Cas  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  : supposons que la série  $\sum |u_n|$  converge. Comme  $u_n \geq -|u_n|$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$0 \leq u_n + |u_n| \leq 2|u_n|.$$

Ainsi, comme  $\sum |u_n|$  converge, on obtient par comparaison que la série à termes positifs  $\sum (u_n + |u_n|)$  converge. Comme la série  $\sum (-|u_n|)$  converge, la somme des deux séries  $\sum (u_n + |u_n| - |u_n|) = \sum u_n$  converge.

- Cas  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $|\Re u_n| \leq |u_n|$  et  $|\Im u_n| \leq |u_n|$ . Ainsi, comme  $\sum |u_n|$  converge, on a la convergence des séries à termes positifs  $\sum |\Re u_n|$  et  $\sum |\Im u_n|$  par comparaison. Par conséquent, le point précédent assure que les séries  $\sum \Re u_n$  et  $\sum \Im u_n$  convergent, ce qui conclut.

L'inégalité se déduit en remarquant que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq \sum_{k=0}^n |u_k|$ , et en passant à la limite.  $\square$

**Exemple.** Nature de la série  $\sum u_n$  avec  $u_n = (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ .

On a  $|u_n| = \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$ . Comme  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge, on en déduit que  $\sum |u_n|$  converge, donc  $\sum u_n$  converge.

**6. Théorèmes de comparaison pour la convergence absolue**

On note que les résultats suivants s'appliquent bien sûr aux séries à termes positifs, pour lesquelles convergence absolue équivaut à convergence.

**Théorème – Comparaison par domination, négligeabilité**

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries telles que  $u_n = O(v_n)$ , ou  $u_n = o(v_n)$ .

Si  $\sum v_n$  converge absolument, alors  $\sum u_n$  converge absolument.

⚠ Si on a seulement convergence de  $\sum v_n$ , on ne peut pas en déduire la convergence de  $\sum u_n$ .

**Démonstration.** Si  $u_n = O(v_n)$ , alors la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  est bornée, disons par  $M > 0$ . Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n \leq Mv_n$ . Comme  $\sum v_n$  et  $\sum Mv_n$  sont de même nature, le résultat découle directement du théorème de comparaison des séries à termes positifs.

Le cas où  $u_n = o(v_n)$  est traité dans le cas ci-dessus : si  $u_n = o(v_n)$ , alors  $u_n = O(v_n)$ .  $\square$

**Remarque.** Si de plus les séries sont à termes positifs, on a montré que sous les hypothèses du théorème, si  $\sum u_n$  diverge, alors  $\sum v_n$  diverge.

### Montrer la convergence par comparaison à une série de Riemann

On peut montrer la convergence (absolue) de  $\sum u_n$  en cherchant  $\alpha > 1$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

La série  $\sum u_n$  est alors absolument convergente par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ .

### Exemples.

- ◇  $\sum_{n \geq 3} \frac{\ln n}{n^3}$  : la série est à termes positifs et, par croissance comparée, on a  $n^2 \frac{\ln n}{n^3} = \frac{\ln n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $\frac{\ln n}{n^3} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Comme  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge,  $\sum \frac{\ln n}{n^3}$  aussi.
- ◇  $\sum_{n \geq 3} \frac{\ln n}{n^2}$  : la série est à termes positifs et, par croissance comparée, on a  $n^{\frac{3}{2}} \frac{\ln n}{n^2} = \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $\frac{\ln n}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ . Comme  $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$  converge,  $\sum \frac{\ln n}{n^2}$  aussi.
- ◇  $\sum e^{-\sqrt{n}}$  : la série est à termes positifs et, par croissance comparée, on a  $n^2 e^{-\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $e^{-\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Comme  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge,  $\sum e^{-\sqrt{n}}$  aussi.

### Corollaire - Comparaison par équivalence

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries telles que  $u_n \sim v_n$ . Alors  $\sum u_n$  converge absolument si et seulement si  $\sum v_n$  converge absolument.

**Démonstration.** Comme  $u_n \sim v_n$ , on sait que  $u_n = O(v_n)$  et  $v_n = O(u_n)$ . Le résultat se déduit alors directement du corollaire ci-dessus.  $\square$

**Remarque.** Si de plus les séries sont à termes positifs, on a montré que  $\sum u_n$  diverge si et seulement si  $\sum v_n$  diverge.

### Exemples.

1. Nature de  $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ .

La série est à termes positifs, or

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \sim \frac{1}{n}.$$

Comme  $\frac{1}{n}$  est le terme général d'une série divergente, la série diverge.

2. Nature de  $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ .

La série est à termes positifs, or

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}.$$

Comme  $\frac{1}{n^2}$  est le terme général d'une série convergente, la série converge.

3. Nature de  $\sum_{n \geq 3} \frac{1}{2^n - n}$ .

La série est à termes positifs, or

$$\frac{1}{2^n - n} \sim \frac{1}{2^n}.$$

Comme  $\frac{1}{2^n}$  est le terme général d'une série convergente, la série converge.

⚠ Le critère ci-dessus ne renseigne que sur la nature des séries, il ne donne *pas* en général de résultat d'équivalence des sommes partielles.

### Lemme - Comparaison logarithmique (HP)

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$ . On suppose qu'il existe un rang  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Si  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  converge, et si  $\sum u_n$  diverge, alors  $\sum v_n$  diverge.

**Démonstration.** Par produit télescopique et par l'hypothèse de l'énoncé, on a, pour tout  $n \geq n_0$ ,

$$\frac{u_n}{u_{n_0}} = \prod_{k=n_0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \prod_{k=n_0}^{n-1} \frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{v_n}{v_{n_0}}, \quad \text{donc} \quad u_n \leq \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} v_n.$$

Le théorème de comparaison des séries à termes positifs permet de conclure.  $\square$

### Remarques.

- On appelle ce dernier résultat *comparaison logarithmique* car en composant par la fonction  $\ln$ , l'hypothèse se réécrit  $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \leq \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$ , et on obtient une série télescopique en sommant.
- Le résultat s'applique notamment à la démonstration de la règle de d'Alembert qui suit, et permet d'obtenir d'autres règles plus fines par ailleurs. Le résultat n'étant pas mentionné dans le programme, il faut néanmoins le démontrer pour toute utilisation.

La règle qui suit est basée sur la comparaison logarithmique à une série géométrique.

### Théorème - Règle de d'Alembert

Soit  $\sum u_n$  une série numérique telle que  $(u_n)$  est non nulle à partir d'un certain rang, et  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \overline{\mathbb{R}}_+$ .

- Si  $\ell < 1$ , alors  $\sum u_n$  converge absolument.
- Si  $\ell > 1$ , alors  $\sum u_n$  diverge grossièrement.

### Démonstration.

- On suppose  $\ell < 1$ . Si  $\alpha \in ]\ell, 1[$ , alors à partir d'un certain rang,

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leq \alpha = \frac{\alpha^{n+1}}{\alpha^n}.$$

Comme la série géométrique  $\sum \alpha^n$  converge, le lemme de comparaison logarithmique appliqué aux suites  $(|u_n|)$  et  $(\alpha^n)$  permet de conclure que  $\sum |u_n|$  converge.

- Si  $\ell > 1$ , alors à partir d'un certain rang  $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \geq 1$ , donc la suite  $(|u_n|)$  est strictement croissante et positive, elle ne converge donc pas vers 0. On a donc divergence grossière de  $\sum u_n$ .  $\square$

**Exemple.** On retrouve que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\sum \frac{z^n}{n!}$  est convergente : si  $z \in \mathbb{C}^*$ , on a  $\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|z|^n} = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

### Remarques.

- Lorsque  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ , on ne peut pas conclure sur la nature de la série : par exemple, si  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \left( \frac{n}{n+1} \right)^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,$$

or on sait que  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge si  $\alpha > 1$  et diverge si  $\alpha \leq 1$ .

- La règle de Raabe-Duhamel est un raffinement de la règle de d'Alembert qui traite certains cas où  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ , à l'aide d'une comparaison logarithmique, cette fois avec les séries de Riemann (voir TD).

## 7. Semi-convergence

### Définition – Série semi-convergente

Une série qui est convergente sans être absolument convergente est dite *semi-convergente*.

Le résultat qui suit permet d'obtenir facilement des séries semi-convergentes.

### Théorème – Critère spécial des séries alternées

Si  $(a_n)$  est une suite décroissante qui tend vers 0, alors la série  $\sum (-1)^n a_n$  est convergente.

De plus, si  $(S_n)$  est la suite des sommes partielles de la série  $\sum (-1)^n a_n$ , et  $S$  sa somme, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, |S - S_n| \leq a_{n+1}.$$

**Démonstration.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$ . Nous allons montrer que les suites  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$  sont adjacentes.

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $S_{2(n+1)} - S_{2n} = S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$ , donc  $(S_{2n})$  décroît.
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = S_{2n+3} - S_{2n+1} = -a_{2n+3} + a_{2n+2} \geq 0$ , donc  $(S_{2n})$  croît.
- Par ailleurs,  $S_{2n+1} - S_{2n} = -a_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Le théorème des suites adjacentes assure que  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$  convergent vers la même limite. On sait que ceci entraîne que la suite  $(S_n)$  converge, c'est-à-dire que  $\sum (-1)^n a_n$  converge.

Par ailleurs, la suite  $(S_{2n})$  est minorée par  $S$  et la suite  $(S_{2n+1})$  est majorée par  $S$ , donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

- ◇ comme  $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ , on a  $-a_{2n+1} \leq S - S_{2n} \leq 0$ , donc  $|S - S_{2n}| \leq a_{2n+1}$ .
- ◇ comme  $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2}$ , on a  $0 \leq S - S_{2n+1} \leq a_{2n+1}$ , donc  $|S - S_{2n+1}| \leq a_{2n+2}$ .

On a donc bien pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|S - S_n| \leq a_{n+1}$ . □

**Exemple.** La série alternée  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  est convergente, car la suite  $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$  est décroissante de limite 0.

Il arrive fréquemment qu'on ne puisse pas directement utiliser le critère des séries alternées, car la suite  $(a_n)$  n'est pas monotone, ou sa monotonie est trop contraignante à montrer.

Dans ce cas, on pensera à décomposer l'étude en l'étude de plusieurs séries, en commençant par exemple par un développement asymptotique de la suite  $(a_n)$ , de manière à isoler une série vérifiant le critère des séries alternées, une série absolument convergente et/ou une série divergente.

**Exemple.** Déterminons la nature de la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$ . On pose  $u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$ .

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n}} = \frac{(-1)^n}{n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi,  $\sum u_n$  est la somme d'une série convergente par le critère des séries alternées, et d'une série absolument convergente. Elle est donc convergente.

**Exercice 2.** Faire l'étude plus générale de la nature de la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ , où  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

## 8. Sommation des relations de comparaison

### Théorème – Sommation des relations de comparaison

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries numériques. On suppose que  $\sum v_n$  est à termes positifs. On note  $(S_n)$  et  $(S'_n)$  les suites des sommes partielles respectives de  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$ . On note  $(R_n)$  et  $(R'_n)$  les suites des restes en cas de convergence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k, \quad \text{et} \quad R'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

1. Si  $\sum v_n$  converge,
  - ◊ si  $u_n = O(v_n)$ , alors  $R_n = O(R'_n)$ , et si  $u_n = o(v_n)$ , alors  $R_n = o(R'_n)$
  - ◊ si  $u_n \sim v_n$ , alors  $\sum u_n$  converge et  $R_n \sim R'_n$ .
2. Si  $\sum v_n$  diverge,
  - ◊ si  $u_n = O(v_n)$ , alors  $S_n = O(S'_n)$ , et si  $u_n = o(v_n)$ , alors  $S_n = o(S'_n)$ .
  - ◊ si  $u_n \sim v_n$ , alors  $S_n \sim S'_n$ .

**Démonstration.**

1. On suppose que  $u_n = O(v_n)$ . On sait déjà que  $\sum u_n$  converge, et il existe alors  $M \in \mathbb{R}$  et un rang  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $|u_n| \leq Mv_n$ . Ainsi, pour tout  $n \geq N$ ,

$$|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} Mv_k = MR'_n, \quad \text{donc} \quad R_n = O(R'_n).$$

Si  $u_n = o(v_n)$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a  $|u_n| \leq \varepsilon v_n$  à partir d'un certain rang, et on conclut de manière similaire au cas précédent.

Si  $u_n \sim v_n$ , alors  $u_n - v_n = o(v_n)$ , donc par le point précédent,  $R_n - R'_n = o(R'_n)$ , ce qui entraîne  $R_n \sim R'_n$ .

2. On suppose  $u_n = O(v_n)$ . Soient  $M \in \mathbb{R}$  et  $N \in \mathbb{N}$ , pour tout  $n \geq N$ ,  $|u_n| \leq Mv_n$ . Pour tout  $n \geq N$ ,

$$|S_n| \leq \sum_{k=0}^n |u_k| \leq \sum_{k=0}^N |u_k| + \sum_{k=N+1}^n |u_k| \leq \sum_{k=0}^N |u_k| + M \sum_{k=N+1}^n v_k = \sum_{k=0}^N |u_k| + M S'_n$$

Comme  $S'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ , il existe un rang  $N' \geq N$  tel que :  $\forall n \geq N'$ ,  $M S'_n \geq \sum_{k=0}^N |u_k|$ . Ainsi,

$$\forall n \geq N', \quad |S_n| \leq 2M S'_n, \quad \text{donc} \quad S_n = O(S'_n).$$

On déduit les deux autres cas avec les mêmes adaptations que pour le cas convergent. □

**Remarques.**

- On retiendra que par comparaison avec une série  $\sum v_n$  à termes positifs, si  $u_n \sim v_n$ ,  
**il y a équivalence des restes en cas de convergence, et des sommes partielles en cas de divergence.**
- Comme précédemment, le résultat est encore valable si  $\sum v_n$  est de signe constant à partir d'un certain rang.

**Équivalence des restes ou des sommes partielles pour les séries de Riemann (HP).**

$$\text{Si } \alpha < 1, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n, \quad \text{si } \alpha > 1, \quad \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

**Démonstration.** Cas  $\alpha < 1$  : on a pour tout entier  $k \geq 2$ ,

$$\frac{1}{k^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} = \frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} \left( \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{\alpha-1} - 1 \right) \sim \frac{1}{k^{\alpha-1}} \left( -\frac{\alpha-1}{k} \right) = -\frac{1-\alpha}{k^\alpha}.$$

Comme  $\frac{1}{k^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} \sim -\frac{1-\alpha}{k^\alpha}$  et comme  $\sum \frac{1}{k^\alpha}$  diverge, il y a équivalence des sommes partielles :

$$(1-\alpha) \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{k^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} \right) \sim \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

par télescope.

Le cas  $\alpha > 1$  est analogue, avec le même télescope en considérant l'équivalence des restes. On obtient le cas  $\alpha = 1$  en trouvant un équivalent de  $\ln(k) - \ln(k-1)$ , et en procédant encore par télescope. □

On retrouve ainsi des résultats déjà rencontrés à l'aide de comparaisons séries intégrales. Cette dernière méthode est à connaître et à savoir refaire, les résultats ne sont pas explicitement au programme.

**Développement asymptotique de la série harmonique.**

On note  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Il existe un réel  $\gamma$  (appelé constante d'Euler-Mascheroni) telle que

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

**Démonstration.**

- On a vu que  $H_n \sim \ln(n)$  ci-dessus. On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n = H_n - \ln(n).$$

- On cherche un équivalent de  $u_n$ . On a

$$\begin{aligned} u_n - u_{n+1} &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right) - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi,  $u_{n+1} - u_n \sim \frac{1}{n^2}$ . Par comparaison,  $\sum (u_n - u_{n+1})$  converge (absolument), donc la suite  $(u_n)$  converge. On note  $\gamma$  sa limite. On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$v_n = H_n - \ln(n) - \gamma.$$

- On cherche un équivalent de  $v_n$ . On a  $v_n - v_{n+1} = u_n - u_{n+1} \sim \frac{1}{2n^2}$ . Ainsi, la série  $\sum (v_{n+1} - v_n)$  converge, et par sommation des relations de comparaison,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (v_k - v_{k+1}) \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} \sim \frac{1}{2n}$$

d'après l'équivalence des restes pour le séries de Riemann. Par télescopage,  $\sum_{k=n}^{+\infty} (v_k - v_{k+1}) = v_n$  car  $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Ainsi,  $v_n \sim \frac{1}{2n}$ , ce qui donne

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad \square$$

**Remarque.** La méthode utilisée dans le calcul du développement asymptotique de la série harmonique est transposable directement dans bien d'autres cas de recherche de développement asymptotique de sommes partielles ou de restes.

- on cherche un équivalent du terme général, puis selon convergence ou divergence, un équivalent des sommes partielles ou des restes.
- on soustrait l'équivalent aux sommes partielles ou aux restes (selon) pour obtenir une suite  $(u_n)$  dont on souhaite trouver un équivalent. L'étude de  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  (restes ou sommes partielles selon convergence ou divergence), permet ceci par télescopage.

On peut réitérer pour trouver les termes suivants dans le développement asymptotique.

**Théorème - Lemme de Cesàro**

Si  $(u_n)$  est une suite qui converge vers un réel  $\ell$ , alors

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

**Démonstration.** Il suffit de remarquer que  $u_n - \ell = o(1)$ . Comme  $\sum 1$  est une série à termes positifs divergente, on a

$$\sum_{k=0}^n (u_k - \ell) = o\left(\sum_{k=0}^n 1\right), \quad \text{donc} \quad \sum_{k=0}^n u_k = (n+1)\ell + o(n), \quad \text{et} \quad \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k = \ell + o(1). \quad \square$$

## 9. Transformation d'Abel (HP)

Le procédé qui suit est utilisé de la même manière que l'intégration par parties pour les intégrales : il s'agit de déterminer la nature ou éventuellement de calculer la somme d'une série de la forme  $\sum u_n v_n$ . On pensera à une manipulation du type qui suit en particulier lorsque :

$$\begin{cases} (U_n) \text{ est bornée,} \\ v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{cases} \quad (*)$$

En posant  $U_{-1} = 0$  pour le besoin des calculs, on a  $u_k = U_k - U_{k-1}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Ceci donne :

$$\sum_{k=0}^n u_k v_k = \sum_{k=0}^n (U_k - U_{k-1}) v_k = \sum_{k=0}^n U_k v_k - \sum_{k=0}^n U_{k-1} v_k = \sum_{k=0}^n U_k v_k - \sum_{k=0}^{n-1} U_k v_{k+1}.$$

Ainsi,

**Transformation d'Abel.**

$$\sum_{k=0}^n u_k v_k = U_n v_n + \sum_{k=0}^{n-1} U_k (v_k - v_{k+1}).$$

Dans le cadre décrit ci-dessus, on a  $U_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc les séries  $\sum u_n v_n$  et  $\sum U_n (v_n - v_{n+1})$  ont même nature.

**Remarques.**

- Si on suppose  $(U_n)$  bornée et  $(v_n)$  de limite nulle, on donne donc deux cadres tels que On déduit alors deux cadres dans lesquels on obtient la convergence de  $\sum u_n v_n$  par le procédé de transformation d'Abel :
  - ◊ si en plus de  $(*)$ , la suite  $(v_n)$  est réelle et décroissante, alors  $\sum u_n v_n$  converge (critère de Dirichlet),
  - ◊ si en plus de  $(*)$ , la série  $\sum (v_k - v_{k+1})$  converge absolument, alors  $\sum u_n v_n$  converge (critère d'Abel).
- On notera bien que ce procédé n'est pas explicitement au programme. Lors de toute utilisation, le calcul ci-dessus devra donc être mené entièrement.

## II Dénombrabilité et familles sommables

### 1. Ensembles dénombrables

Il est aisé de comparer deux ensembles finis en considérant leur cardinal. Il est moins évident de faire de même pour deux ensembles infinis. En terme de nombre d'éléments, on ne saurait faire de différence entre  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  : tous en ont une quantité infinie.

On peut toutefois changer de point de vue, et considérer que compter les éléments d'un ensemble fini  $E$  à  $n$  éléments équivaut à associer à chaque élément un entier de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  qui lui est propre. En d'autres termes, trouver une bijection entre  $E$  et  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . On ne dirait plus *l'ensemble  $E$  a  $n$  éléments*, mais :  *$E$  et  $\llbracket 1, n \rrbracket$  ont même cardinal*.

Plus généralement, on dira que deux ensembles  $E$  et  $F$  ont même cardinal s'il existe une bijection entre eux.

#### Définition - Ensembles équipotents

On dit que deux ensembles  $E$  et  $F$  sont équipotents s'il existe une bijection entre  $E$  et  $F$ . On notera alors parfois  $\text{Card } E = \text{Card } F$ , ou encore  $E \cong F$ .

**Remarques.**

- L'équipotence vérifie les propriétés d'une relation d'équivalence : si  $E, F, G$  sont des ensembles, alors
  - ◊  $E \cong E$  (en considérant  $\text{Id}_E$ ),
  - ◊  $E \cong F \Rightarrow F \cong E$  (en considérant la bijection réciproque),
  - ◊  $(E \cong F \text{ et } F \cong G) \Rightarrow E \cong G$  (en composant les bijections).
- On note parfois  $\text{Card } E \leq \text{Card } F$  s'il existe une injection de  $E$  dans  $F$ , et on dit que  $E$  est subpotent à  $F$ . La subpotence vérifie les propriétés d'une relation d'ordre. Si  $E, F, G$  sont des ensembles,

- ◊  $\text{Card } E \leq \text{Card } F$ .
- ◊  $(\text{Card } E \leq \text{Card } F \text{ et } \text{Card } F \leq \text{Card } G) \Rightarrow \text{Card } E \leq \text{Card } G$  (en composant les injections).
- ◊  $(\text{Card } E \leq \text{Card } F \text{ et } \text{Card } F \leq \text{Card } E) \Rightarrow \text{Card } E = \text{Card } F$ .

Ce dernier résultat porte le nom de théorème de Cantor-Bernstein, sa preuve est technique et n'est pas au programme.

### Exemples.

- $\text{Card } \mathbb{N}^* = \text{Card } \mathbb{N}$  : l'application  $\varphi : n \mapsto n - 1$  est une bijection de  $\mathbb{N}^*$  sur  $\mathbb{N}$ .
- $\text{Card}(2\mathbb{N}) = \text{Card } \mathbb{N}$  : l'application  $\psi : n \mapsto 2n$  est une bijection de  $\mathbb{N}$  sur  $2\mathbb{N}$ .
- $\text{Card } \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \text{Card}\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  : l'application  $\Phi : A \mapsto \mathbb{1}_A$  est une bijection de  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  sur  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ .
- $\text{Card } \mathbb{R} = \text{Card}] - 1, 1[$  : l'application  $\text{th}$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $] - 1, 1[$ .

### Définition - Ensembles dénombrables, ensembles au plus dénombrables

On dit qu'un ensemble  $E$  est dénombrable s'il existe une bijection de  $E$  dans  $\mathbb{N}$ , c'est-à-dire  $\text{Card } E = \text{Card } \mathbb{N}$ .

On dit qu'il est au plus dénombrable s'il existe une injection de  $E$  dans  $\mathbb{N}$ , c'est-à-dire  $\text{Card } E \leq \text{Card } \mathbb{N}$ .

**Exemple.** D'après ce qui précède,  $\mathbb{N}^*$  et  $2\mathbb{N}$  sont dénombrables.

### Remarques.

- Un ensemble dénombrable est donc un ensemble dont on peut écrire les éléments comme les termes (distincts) d'une suite  $u : \mathbb{N} \rightarrow E$ .
- Une ensemble  $E$  est donc au plus dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de  $\mathbb{N}$ . On retiendra qu'un ensemble est au plus dénombrable si et seulement s'il est fini ou dénombrable.
- Pour montrer qu'un ensemble est au plus dénombrable, on peut indifféremment montrer qu'il existe une injection de  $E$  dans  $\mathbb{N}$ , ou qu'il existe une surjection de  $\mathbb{N}$  dans  $E$  : à partir d'une surjection  $\psi : \mathbb{N} \rightarrow E$ , on construit une injection de  $E$  dans  $\mathbb{N}$  en choisissant pour chaque  $x \in E$  un de ses antécédents par  $\psi$  (le plus petit par exemple).

### Théorème - Cardinal de $\mathbb{Z}$ , de $\mathbb{N}^2$

Les ensembles  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{N}^2$  sont dénombrables.

### Démonstration.

- On construit une bijection entre  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{N}$  en associant à tous les entiers positifs un numéro pair en partant de 0, et à tous les entiers négatifs un numéro impair en partant de  $-1$ . En d'autres termes, on définit  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  par

$$\varphi : n \mapsto \begin{cases} 2n & \text{si } n \geq 0, \\ -2n - 1 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

On vérifie sans peine que  $\varphi$  est bien une bijection.

- On introduit l'application  $\psi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^*$  définie par

$$\psi : (a, b) \mapsto 2^a(2b + 1)$$

On sait que tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$  s'écrit de manière unique  $n = 2^a m$ , où  $a$  est la valuation 2-adique de  $n$  et  $m$  est impair. En d'autres termes, tout entier  $n$  s'écrit de manière unique sous la forme  $n = 2^a(2b + 1)$ , où  $a, b \in \mathbb{N}$ , ce qui assure que  $\psi$  est une bijection.  $\square$

Le théorème suivant est un résultat important qui assure qu'en prenant un produit cartésien fini, ou en faisant une union dénombrable d'ensembles dénombrables, on obtient un ensemble qui est toujours dénombrable.

### Théorème - Produit, union dénombrable d'ensembles au plus dénombrables

- Si  $E_1, \dots, E_k$  sont des ensembles au plus dénombrables, alors  $E_1 \times \dots \times E_k$  est au plus dénombrable.
- Une union dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

**Démonstration.**

- Traitons le cas  $k = 2$  : si  $\varphi_1 : E \rightarrow \mathbb{N}$  et  $\varphi_2 : E_2 \rightarrow \mathbb{N}$  sont injectives, alors l'application

$$\begin{aligned} \varphi : E_1 \times E_2 &\rightarrow \mathbb{N}^2 \\ (x, y) &\mapsto (\varphi_1(x), \varphi_2(y)) \end{aligned}$$

est clairement une injection. Ainsi,  $\text{Card } E_1 \times E_2 \leq \text{Card } \mathbb{N}^2 \leq \text{Card } \mathbb{N}$ , et  $E_1 \times E_2$  est au plus dénombrable. Le cas général s'en déduit alors par récurrence.

- Une quantité dénombrable d'ensembles au plus dénombrables peut s'écrire comme une suite  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de tels ensembles. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on considère une surjection  $\varphi_n : \mathbb{N} \rightarrow E_n$ . On note  $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ , et on introduit

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{N}^2 &\rightarrow E \\ (n, m) &\mapsto \varphi_n(m) \end{aligned}$$

L'application  $\Phi$  est surjective : si  $x \in E$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $x \in E_n$ , et il existe alors  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $x = \varphi_n(m)$ .  $\square$

**Remarques.**

- Bien sûr, en remplaçant les injections et les surjections par des bijections, on obtient qu'un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable, et qu'une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- On en déduit que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{N}^k$  est dénombrable.

**Théorème - Cardinal de  $\mathbb{Q}$** 

L'ensemble  $\mathbb{Q}$  est dénombrable.

**Démonstration.** On définit l'application  $\varphi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  en posant, pour tout  $x \in \mathbb{Q}$ ,  $\varphi(x) = (p, q)$ , où  $\frac{p}{q}$  est l'unique écriture de  $x$  telle que  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  et  $p \wedge q = 1$ .

L'application  $\varphi$  est injective : si  $x, y \in \mathbb{Q}$  sont tels que  $\varphi(x) = \varphi(y) = (p, q)$ , alors  $x = \frac{p}{q} = y$ . On obtient ainsi que  $\text{Card } \mathbb{Q} \leq \text{Card } \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \leq \text{Card } \mathbb{N}$ , car on a vu que  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  est dénombrable.  $\square$

**Théorème - Argument diagonal de Cantor**

L'ensemble  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable.

**Démonstration.** *Non exigible.* Il suffit de démontrer que  $[0, 1]$  n'est pas dénombrable. On raisonne par l'absurde, et on suppose que  $[0, 1]$  est dénombrable, on peut alors écrire  $[0, 1] = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ . Les réels  $x_n$  peuvent s'écrire de manière décimale infinie sous la forme  $x_n = 0, x_n^1 x_n^2 x_n^3 \dots$ . On considère alors un réel  $x$  donné par son écriture décimale  $x = 0, x^1 x^2 x^3 \dots$  tel que le  $n$ -ème chiffre  $x^n$  dans l'écriture décimale de  $x$  ne soit pas 0, 9, ou  $x_n^n$ .

Ceci assure que  $x$  ne peut être égal à aucun des  $x_n$ , et entre en contradiction avec  $[0, 1] = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ .  $\square$

**Théorème - Card  $E < \text{Card } \mathcal{P}(E)$  (HP)**

Soit  $E$  est un ensemble non vide, il n'existe pas de surjection de  $E$  dans  $\mathcal{P}(E)$ . On a donc  $\text{Card } E \leq \text{Card } \mathcal{P}(E)$  mais  $\text{Card } E \neq \text{Card } \mathcal{P}(E)$ .

**Démonstration.** Supposons qu'il existe une surjection  $\varphi$  de  $E$  dans  $\mathcal{P}(E)$ . Soit  $A = \{x \in E, x \notin \varphi(x)\}$ . Comme  $\varphi$  est surjective, il existe  $a \in E$  tel que  $\varphi(a) = A$ . Alors :

- soit  $a \in A$ , alors  $a \notin \varphi(a) = A$ , et il y a contradiction,
- soit  $a \notin A$ , alors  $a \in \varphi(a) = A$ , et il y a contradiction.

On aboutit donc à une contradiction, et il n'existe pas de surjection de  $E$  dans  $\mathcal{P}(E)$ . En considérant l'injection  $x \mapsto \{x\}$  de  $E$  dans  $\mathcal{P}(E)$ , on voit par ailleurs que  $\text{Card } E \leq \text{Card } \mathcal{P}(E)$ .  $\square$

**Remarque.**  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  n'est donc pas en bijection avec  $\mathbb{N}$ , en d'autres termes il n'est pas dénombrable. On peut en fait voir que  $\text{Card } \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \text{Card } \{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \text{Card } \mathbb{R}$ , ce qui permet de retrouver que  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable.

## 2. Sommation d'une famille de réels positifs

Nous rappelons ici la théorie des familles sommables, déjà rencontrée en première année. On se réfère au cours de MPSI pour les preuves.

### Définition - Somme d'une famille de $\overline{\mathbb{R}}_+$

Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $\overline{\mathbb{R}}_+$ . On appelle somme de la famille  $(u_i)_{i \in I}$

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup \left\{ \sum_{i \in F} u_i, F \subset I, F \text{ fini} \right\}$$

Si  $\sum_{i \in I} u_i \in \mathbb{R}_+$ , on dit que la famille est *sommable*, et on note parfois  $\sum_{i \in I} u_i < +\infty$ .

### Remarques.

- Si un des termes de la famille est infini, la somme de la famille est infinie.
- Si  $J \subset I$ , alors  $\sum_{i \in J} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i$ .
- Si  $(u_i)_{i \in I}$  est une famille sommable de  $\overline{\mathbb{R}}_+$ , alors la caractérisation du sup assure que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une partie finie  $F \subset I$  telle que

$$\sum_{i \in F} u_i \geq \left( \sum_{i \in I} u_i \right) - \varepsilon.$$

### Théorème - Lien avec les séries à termes positifs

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathbb{R}_+$ .

- ◊ Si  $\sum u_n$  converge, alors  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ,
- ◊ Si  $\sum u_n$  diverge, alors  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = +\infty$ . On note alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$ .

**Remarque.** On retiendra qu'on peut toujours écrire  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  lorsque les réels  $u_n$  sont positifs, au sens des familles sommables.

### Théorème - Sommation par paquets

Soient  $(u_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $\overline{\mathbb{R}}_+$  et  $(I_k)_{k \in K}$  une partition de  $I$ , c'est-à-dire que  $I = \bigsqcup_{k \in K} I_k$ . Alors

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} u_i.$$

### Exemples.

- En regroupant par paquets les pairs et les impairs, on a  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n \in 2\mathbb{N}} u_n + \sum_{n \in 2\mathbb{N}+1} u_n$ .
- On peut calculer la somme  $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} u_{i+j}$  en regroupant par paquets tous les couples  $(i,j)$  ayant même somme  $i+j$  :

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} u_{i+j} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2, \\ i+j=k}} u_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k |\{(i,j) \in \mathbb{N}^2, i+j=k\}| = \sum_{k \in \mathbb{N}} (k+1)u_k.$$

$$\text{car } \mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} \{(i,j) \in \mathbb{N}^2, i+j=k\}.$$

Le théorème de Fubini énoncé ci-dessous concerne le cas où la famille est indexée par un produit. Il assure qu'on peut intervertir les sommes lors de sommations successives d'une famille de  $\overline{\mathbb{R}}_+$ .

**Théorème – Fubini-Tonelli (cas positif)**

Soit  $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$  une famille de  $\overline{\mathbb{R}}_+$ . On a

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{i,j}.$$

**Démonstration.** On remarque que  $I \times J = \bigsqcup_{i \in I} A_i$ , où  $A_i = \{(i, j), j \in J\}$ , donc par sommation par paquets,

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{(i,j) \in A_i} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{i,j}.$$

De même pour l'autre somme. □

**Remarques.**

- Si pour tout  $(i, j) \in I \times J$ , le réel  $u_{i,j}$  s'écrit  $u_{i,j} = a_i b_j$ , alors le théorème de Fubini donne

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_i b_j = \left( \sum_{i \in I} a_i \right) \left( \sum_{j \in J} b_j \right).$$

- *Cas des sommes triangulaires.* Avec le même raisonnement, on obtient qu'on peut intervertir les sommes triangulaires de nombres réels positifs comme les sommes finies, par exemple :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^i u_{i,j} = \sum_{\substack{(i,j) \in I \times J, \\ j \leq i}} u_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=j}^{+\infty} u_{i,j}.$$

**Théorème – Sommation et opérations**

Soient  $(u_i)_{i \in I}$  et  $(v_i)_{i \in I}$  deux familles d'éléments de  $\overline{\mathbb{R}}_+$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ .

- *Croissance* : si pour tout  $i \in I$ ,  $u_i \leq v_i$ , alors  $\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in I} v_i$ .
- *Linéarité* :  $\sum_{i \in I} (\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i \in I} u_i + \mu \sum_{i \in I} v_i$ .
- *Réindexation* : si  $\sigma$  est une bijection d'un ensemble  $J$  dans  $I$ , alors  $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} u_{\sigma(j)}$ .

**Remarques.**

- La croissance entraîne que si pour tout  $i \in I$ ,  $u_i \leq v_i$ , et  $(v_i)_{i \in I}$  est sommable, alors  $(u_i)_{i \in I}$  l'est également.
- Le résultat sur la réindexation assure en particulier que, si une série à termes positifs  $\sum u_n$  est convergente, alors sa somme ne dépend pas de l'ordre des termes : on dit qu'elle est *commutativement convergente*.

**3. Familles sommables****Définition – Famille sommable –  $\ell^1(I)$** 

On dit qu'une famille  $(u_i)_{i \in I}$  de nombres complexes est *sommable* si  $\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$ . On note  $\ell^1(I)$  l'ensemble des familles sommables de  $\mathbb{C}^I$ .

**Exemple.** Si  $\sum u_n$  est une série de nombres complexes, alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est sommable si et seulement si la série  $\sum u_n$  est absolument convergente.

**Notation – Partie positive, partie négative**

Si  $x \in \mathbb{R}$ , on note

$$x^+ = \max(x, 0), \quad \text{et} \quad x^- = \max(-x, 0)$$

On appelle  $x^+$  la *partie positive* du réel  $x$ , et  $x^-$  sa *partie négative*.

**Remarque.** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $x^+, x^- \in \mathbb{R}_+$ . Par ailleurs,

- ◇  $x^+ = \frac{1}{2}(|x| + x)$ , et  $x^- = \frac{1}{2}(|x| - x)$ ,
- ◇  $x = x^+ - x^-$ , et  $|x| = x^+ + x^-$ .

### Définition-théorème - Somme d'une famille sommable

- Si  $(u_i)_{i \in I}$  une famille sommable de  $\mathbb{R}^I$ , alors  $(u_i^+)_{i \in I}$  et  $(u_i^-)_{i \in I}$  sont sommables. On définit alors la *somme de la famille*  $(u_i)_{i \in I}$  :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-.$$

- Si  $(u_i)_{i \in I}$  une famille sommable de  $\mathbb{C}^I$ , alors  $(\Re u_i)_{i \in I}$  et  $(\Im u_i)_{i \in I}$  sont sommables. On définit alors la *somme de la famille*  $(u_i)_{i \in I}$  :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} \Re u_i + i \sum_{i \in I} \Im u_i.$$

### Théorème - Approximation par une somme finie

Si  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable et  $\varepsilon > 0$ , alors il existe une partie  $F \subset I$  finie telle que

$$\left| \sum_{i \in I} u_i - \sum_{i \in F} u_i \right| \leq \varepsilon.$$

### Théorème - Support d'une famille sommable

Si  $(u_i)_{i \in I}$  est une famille sommable de  $\mathbb{K}$ , alors l'ensemble  $S = \{i \in I, u_i \neq 0\}$ , appelé support de  $(u_i)_{i \in I}$ , est dénombrable.

**Démonstration.** Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $I_k = \{i \in I, |u_i| \geq \frac{1}{k}\}$ , et on remarque que  $S = \{i \in I, u_i \neq 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} I_k$ . Si on suppose  $S$  non dénombrable, il existe  $k_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $I_{k_0}$  est non dénombrable<sup>1</sup>, donc infini. Ainsi,

$$\sum_{i \in I} |u_i| \geq \sum_{i \in I_{k_0}} |u_i| \geq \sum_{i \in I_{k_0}} \frac{1}{k_0} = +\infty,$$

ce qui est une contradiction. □

**Remarque.** Ainsi, si une famille est sommable, elle peut se ramener à la somme d'une famille dénombrable.

## 4. Propriétés de la somme d'une famille sommable

### Théorème - Linéarité de la somme

Soient  $(u_i)_{i \in I}$  et  $(v_i)_{i \in I}$  deux familles de  $\mathbb{K}$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ . Si  $(u_i)_{i \in I}$  et  $(v_i)_{i \in I}$  sont sommables, alors  $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i \in I}$  l'est également, et

$$\sum_{i \in I} (\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i \in I} u_i + \mu \sum_{i \in I} v_i$$

Ainsi,  $\ell^1(I)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1. Sinon  $I_k$  est dénombrable pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , donc  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} I_k$  l'est également.

**Théorème - Inégalité triangulaire**

Si  $(u_i)_{i \in I}$  est une famille sommable de  $\mathbb{K}$ , alors  $\left| \sum_{i \in I} u_i \right| \leq \sum_{i \in I} |u_i|$ .

**Démonstration.** Soit  $F$  une partie finie de  $I$ . On a  $\left| \sum_{i \in F} u_i \right| \leq \sum_{i \in F} |u_i| \leq \sum_{i \in I} |u_i|$  par inégalité triangulaire pour une somme finie, d'où le résultat par passage au sup.  $\square$

**Théorème - Sommation par paquets**

Si  $(u_i)_{i \in I}$  est une famille sommable d'éléments de  $\mathbb{K}$  et  $(I_k)_{k \in K}$  une partition de  $I$ , alors pour tout  $k \in K$ , la famille  $(u_i)_{i \in I_k}$  est sommable, la famille  $(\sum_{i \in I_k} u_i)_{k \in K}$  est sommable, et

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} u_i.$$

Comme dans le cas positif, le théorème de Fubini s'en déduit directement.

**Théorème - Théorème de Fubini**

Si  $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$  est une famille sommable, alors  $(\sum_{j \in J} u_{i,j})_{i \in I}$  et  $(\sum_{i \in I} u_{i,j})_{j \in J}$  sont bien définies et sommables, et

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{i,j}.$$

**Remarque.** On utilisera généralement le théorème en deux temps pour justifier une interversion de somme dans le cas d'une famille réelle ou complexe :

- on justifie la sommabilité, en ayant recours au cas positif : le théorème de Fubini-Tonelli,
- on utilise le théorème de Fubini pour intervertir les sommes.

**5. Produit de Cauchy**

Nous nous intéressons ici à la manière de calculer un produit de sommes de familles sommables, essentiellement dans le cas  $I = \mathbb{N}$  (c'est-à-dire dans le cas des séries). Signalons d'abord le résultat suivant, qui généralise une remarque faite ci-dessus dans le cas des familles de  $\mathbb{R}_+$ .

**Théorème - Somme et produit**

Si  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_j)_{j \in J}$  sont deux familles sommables, alors la famille  $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$  est sommable, et

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_i b_j = \left( \sum_{i \in I} a_i \right) \left( \sum_{j \in J} b_j \right).$$

**Démonstration.** Par le cas positif du théorème de Fubini, on a  $\sum_{(i,j) \in I \times J} |a_i b_j| = \sum_{i \in I} |a_i| \sum_{j \in J} |b_j| < +\infty$ , d'où la sommabilité. Le théorème de Fubini assure alors :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_i b_j = \sum_{i \in I} a_i \left( \sum_{j \in J} b_j \right). \quad \square$$

**Théorème - Produit de Cauchy**

Soient  $a, b \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  telles que les séries  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  convergent absolument. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$ . Alors  $\sum c_n$  converge, et

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n.$$

**Démonstration.** D'après l'hypothèse, les familles  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont sommables, et on a d'après le théorème précédent,

$$\left( \sum_{i=0}^{+\infty} a_i \right) \left( \sum_{j=0}^{+\infty} b_j \right) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_i b_j = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ i+j=n}} a_i b_j = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n,$$

en regroupant par paquets les couples  $(i, j)$  ayant la même somme  $i + j$  :  $\mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \{(i, j) \in \mathbb{N}^2, i + j = n\}$ .  $\square$

**Exemples.**

– Si  $x \in \mathbb{R}$  est tel que  $|x| < 1$ , alors on a  $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$  : comme  $\sum x^n$  converge absolument,

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^n x^i x^{n-i} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sum_{i=0}^n 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

– Si  $x, y \in \mathbb{C}$ , on sait que  $\sum \frac{x^n}{n!}$  et  $\sum \frac{y^n}{n!}$  convergent absolument, donc

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \frac{y^{n-i}}{(n-i)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n.$$

**Remarque.** Ce dernier exemple permet de retrouver que pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $e^x e^y = e^{x+y}$ . En d'autres termes,  $\exp$  est un morphisme de groupes de  $(\mathbb{C}, +)$  vers  $(\mathbb{C}^*, \times)$ .