

Chapitre 3

Réduction des endomorphismes

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

I Éléments propres

1. Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme

Définition - Valeurs propres, vecteurs propres

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une *valeur propre* de u s'il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. En d'autres termes $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0_E\}$.
- Si λ est une valeur propre de u , on appelle sous-espace propre associé à λ le sous-espace vectoriel

$$E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) = \{x \in E, u(x) = \lambda x\}.$$

Les vecteurs *non nuls* de $E_\lambda(u)$ sont appelés les *vecteurs propres* de u associés à la valeur propre λ .

Si E est de dimension finie, on appelle *spectre* et on note $\text{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u .

Remarques.

- ⚠ Un vecteur propre est toujours non nul !
- On généralise la notation $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$ à tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$. Dans ce cas,

$$\lambda \text{ est valeur propre de } u \Leftrightarrow E_\lambda(u) \neq \{0_E\} \Leftrightarrow \dim E_\lambda(u) \geq 1.$$
- On note bien que $E_0(u) = \{x \in E, u(x) = 0_E\} = \text{Ker } u$. Ainsi,

$$0 \text{ est valeur propre de } u \Leftrightarrow u \text{ est non inversible.}$$
- Si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors λ est valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda \text{Id}_E$ est non injectif. Si de plus E est de dimension finie, alors λ est valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda \text{Id}_E$ est non inversible.
- En dimension quelconque, on dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une *valeur spectrale* de u si $u - \lambda \text{Id}_E$ n'est pas inversible, et on note $\text{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs spectrales de u . En dimension finie, valeurs spectrales et valeurs propres sont les mêmes objets.

Caractérisation des valeurs propres en dimension finie. On retiendra qu'en dimension finie, si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\lambda \in \text{Sp}(u) \Leftrightarrow \det(u - \lambda \text{Id}_E) = 0.$$

Exemples.

1. L'endomorphisme nul $u = 0_{\mathcal{L}(E)}$ n'a que 0 pour valeur propre, et $E_0(u) = \text{Ker } u = E$. Ainsi, tout vecteur non nul de E est vecteur propre.
2. Cherchons les valeurs propres de l'endomorphisme φ de $\mathbb{K}[X]$ donné par $\varphi : P \mapsto P'$.
Si $\lambda \in \mathbb{K}$, et $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ vérifie $\varphi(P) = \lambda P$, c'est-à-dire $P' = \lambda P$, alors $\lambda = 0$: le cas $\lambda \neq 0$ est impossible par un argument de degré. Ainsi, $P' = 0_{\mathbb{K}[X]}$, donc P est constant.
Par conséquent, 0 est la seule valeur propre de φ , d'espace propre associé $E_0(u) = \mathbb{K}_0[X]$.
3. On considère des sous-espaces vectoriels F et G supplémentaires dans E , et le projecteur p de E , sur F parallèlement à G . Supposons que $\lambda \in \mathbb{K}$ et $p(x) = \lambda x$, alors

- soit $\lambda \neq 0$, alors comme $\lambda x \in F$, on a $x \in F$, ce qui entraîne que $p(x) = x$ donc $\lambda = 1$,
- soit $\lambda = 0$, alors comme $p(x) = 0_E$, on a $x \in G$.

Finalement, 0 et 1 sont les seules valeurs propres possibles, et on a $E_1(p) = F$, $E_0(p) = G$. Si F et G sont non triviaux, les valeurs propres de p sont exactement 0 et 1.

4. Cherchons les valeurs propres de l'endomorphisme $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

On cherche les réels λ tels que $v - \lambda \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ n'est pas inversible, c'est-à-dire $\det(A - \lambda I_3) \neq 0$, or

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 5-\lambda & 1-\lambda & 2 \\ 5-\lambda & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\det(A - \lambda I_3) = (5 - \lambda)(1 + \lambda)^2$, donc les valeurs propres de v sont -1 et 5 .

5. L'endomorphisme $w \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par $M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ n'a pas de valeur propre (réelle).

En effet, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\det(w - \lambda \text{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \det(M - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 \neq 0$.

Théorème - Somme de sous-espaces propres

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des valeurs propres distinctes de u . La somme $E_{\lambda_1}(u) + \dots + E_{\lambda_k}(u)$ des sous-espaces propres est directe.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur k .

- Si $k = 2$, montrons que $E_{\lambda_1}(u) \cap E_{\lambda_2}(u) = \{0_E\}$ ce qui entraînera que la somme $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2}$ est directe. Si $x \in E_{\lambda_1}(u) \cap E_{\lambda_2}(u)$, alors $u(x) = \lambda_1 x$ et $u(x) = \lambda_2 x$, donc $(\lambda_2 - \lambda_1)x = 0_E$, ce qui donne $x = 0_E$ car $\lambda_2 \neq \lambda_1$.
- Soit $k \geq 3$. Supposons que le résultat est vrai au rang $k - 1$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des valeurs propres distinctes de u , et $(x_1, \dots, x_k) \in E_{\lambda_1}(u) \times \dots \times E_{\lambda_k}(u)$ vérifiant $x_1 + \dots + x_k = 0_E$. On a alors

$$\begin{cases} \lambda_k(x_1 + \dots + x_k) = 0_E \\ u(x_1) + \dots + u(x_k) = 0_E \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \lambda_k x_1 + \dots + \lambda_k x_k = 0_E \\ \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k = 0_E \end{cases}$$

En soustrayant les deux dernières égalités, on obtient

$$(\lambda_k - \lambda_1)x_1 + \dots + (\lambda_k - \lambda_{k-1})x_{k-1} = 0_E$$

Par hypothèse de récurrence, la somme $E_{\lambda_1}(u) + \dots + E_{\lambda_{k-1}}(u)$ est directe, donc $(\lambda_k - \lambda_i)x_i = 0_E$ pour tout $i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$. Comme les λ_i sont distincts, on obtient $x_1 = \dots = x_{k-1} = 0_E$, puis $x_k = 0_E$. Ceci conclut. $\square$

Corollaire - Famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes

Toute famille de vecteurs propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ associés à des valeurs propres de u distinctes est libre.

Démonstration. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs propres de u associés à des valeurs propres λ_i distinctes. Il suffit de montrer que toute sous-famille finie de $(x_i)_{i \in I}$ est libre.

On considère F une partie finie de I et on suppose que $\sum_{i \in F} \alpha_i x_i = 0_E$ pour des scalaires α_i . Comme $\bigoplus_{i \in F} E_{\lambda_i}$ est directe et les x_i sont non nuls, $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in F$. $\square$

Exemple. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $f_k : t \mapsto e^{kt}$. La famille $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille libre de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

En effet, on considère l'endomorphisme $\varphi : f \mapsto f'$ de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, et on remarque que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(f_k) = k f_k$, donc f_k est un vecteur propre associé à la valeur propre k de φ .

Corollaire - Nombre de valeurs propres en dimension finie

Si E est de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $|\text{Sp}(u)| \leq n$, et

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) \leq n.$$

Démonstration. D'après le résultat précédent, si $|\text{Sp}(u)| > n$, alors on dispose d'une famille libre de vecteurs propres de cardinal excédant $\dim E$ ce qui est impossible. Ainsi $|\text{Sp}(u)| \leq n$, et

$$\text{comme } \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u) \subset E, \quad \text{on a } \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) \leq \dim E = n. \quad \square$$

⚠ On peut avoir $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) < n$: il arrive par exemple que u n'ait pas de valeur propre, comme vu dans l'exemple 5.

Le théorème suivant a des conséquences importantes, et doit être bien connu.

Théorème - Endomorphismes qui commutent et stabilité des sous-espaces propres

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Si $u \circ v = v \circ u$, alors les sous-espaces propres de u sont stables par v .

Démonstration. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E_\lambda(u)$. Alors $u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$, donc $v(x) \in E_\lambda(u)$. □

Remarques.

- Bien sûr, si u et v commutent, alors les sous-espaces propres de v sont également stables par u .
- Une conséquence de ce résultat est que si u et v commutent, alors on peut considérer l'endomorphisme induit par v sur $E_\lambda(u)$, ou l'endomorphisme induit par u sur $E_\lambda(v)$.

2. Valeurs propres, vecteurs propres d'une matrice**Définition - Valeurs propres, vecteurs propres d'une matrice**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est vecteur propre de A si X est non nul et s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$AX = \lambda X.$$

On dit alors que λ est valeur propre de A . On appelle sous-espace propre associé à λ le sous-espace vectoriel $E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$, et spectre de A , noté $\text{Sp}(A)$, l'ensemble des valeurs propres de A .

Remarques.

- Comme pour les endomorphismes, $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A si et seulement si $E_\lambda(A) \neq \{0_{n,1}\}$.
- On rappelle que l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'endomorphisme φ_A de $\mathbb{K}^n$ qui a A pour matrice dans la base canonique. En identifiant $\mathbb{K}^n$ à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,

$$\begin{array}{ccc} \varphi_A : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX \end{array}$$

Par définition, les valeurs propres, vecteurs propres, spectre de A ne sont autres que les valeurs propres, vecteurs propres, spectre de l'endomorphisme φ_A .

- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors bien sûr $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et on peut considérer son spectre comme matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, ce qui n'est pas toujours la même chose. On notera dans ce cas $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ ou $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ pour préciser le point de vue.

Dans le cas où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, alors $\bar{\lambda} \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$: si X est un vecteur non nul tel que $AX = \lambda X$,

$$A\bar{X} = \overline{AX} = \overline{\lambda X} = \bar{\lambda} \bar{X}.$$

Exemples.

1. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors : $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On en déduit que $\text{Sp}(A) = \{0\}$. Par ailleurs,

$$E_0(A) = \text{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{K} \right\} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Si $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, nous avons vu que $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \emptyset$. Comme $\det(B - \lambda I_2) = -(\lambda^2 + 1)$, on a $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, i\}$.

Théorème - Spectre et matrices semblables

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A et B sont semblables, alors $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(B)$.

Démonstration. Si A et B sont semblables, il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$. Ainsi, on a $B - \lambda I_n = P^{-1}(A - \lambda I_n)P$, donc $\det(B - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_n)$, et $A - \lambda I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow B - \lambda I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. $\square$

Théorème - Élément propre d'un endomorphisme, éléments propres de sa matrice dans une base

On suppose E de dimension finie. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base de E , et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Alors

- $\text{Sp}(u) = \text{Sp}(A)$,
- si $x \in E$, alors $x \in E_{\lambda}(u) \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \in E_{\lambda}(A)$,

Démonstration. Simple conséquence du résultat sur le calcul des coordonnées de $u(x)$ dans la base $\mathcal{B}$. $\square$

Ce dernier résultat justifie que l'étude des valeurs propres est analogue pour un endomorphisme ou pour une matrice réelle. Dans la suite, les résultats seront énoncés parfois dans un cadre, et parfois dans un autre.

3. Polynôme caractéristique d'une matrice

Définition-théorème - Polynôme caractéristique d'une matrice carrée

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\det(XI_n - A)$ est un polynôme, appelé polynôme caractéristique de A , et souvent noté χ_A .

Démonstration. Par définition du déterminant d'une matrice, on a

$$\det(XI_n - A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \underbrace{(XI_{\sigma(i),i} - a_{\sigma(i),i})}_{\in \mathbb{K}_n[X]} \in \mathbb{K}_n[X]$$

en tant que somme finie de polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$. $\square$

Comme nous allons le voir, l'intérêt du polynôme caractéristique d'une matrice A réside dans ses racines, qui sont exactement les valeurs propres de A .

Théorème - Polynôme caractéristique et valeurs propres

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A si et seulement si $\chi_A(\lambda) = 0$. Autrement dit, les valeurs propres de A sont exactement les racines du polynôme caractéristique χ_A .

Démonstration. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, on a : $\lambda \in \text{Sp}(A) \Leftrightarrow \text{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0_{n,1}\} \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0 \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$. $\square$

Exemple. Si $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, alors $\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 \\ 0 & X \end{vmatrix} = X^2$, donc on retrouve que la seule valeur propre de A est 0.

Théorème - Propriétés du polynôme caractéristique

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\deg \chi_A = n$, et χ_A est de la forme

$$\chi_A = X^n - \text{tr}(A) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A.$$

Autrement dit, si $A = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, alors $a_n = 1$, $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$ et $a_0 = (-1)^n$.

Remarques.

- On retiendra donc que χ_A est unitaire.
- Il arrive que le polynôme caractéristique de A soit défini par $\det(A - XI_n)$, ce qui revient à multiplier le polynôme χ_A ci-dessus par $(-1)^n$. Les racines étant inchangées, elles sont toujours les valeurs propres de A .
Pour ce choix, le coefficient dominant du polynôme obtenu est $(-1)^n$, et son coefficient constant vaut $\det A$.

Démonstration. On a

$$\chi_A = \det(XI_n - A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (XI_{\sigma(i),i} - a_{\sigma(i),i}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (\delta_{\sigma(i),i} X - a_{\sigma(i),i}).$$

Intéressons-nous à chacun des termes de cette dernière somme.

- Si $\sigma = \operatorname{Id}$, alors $\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (\delta_{\sigma(i),i} X - a_{\sigma(i),i}) = (X - a_{1,1}) \dots (X - a_{n,n})$. Or ce dernier polynôme s'écrit

$$(X - a_{1,1}) \dots (X - a_{n,n}) = X^n - (a_{1,1} + \dots + a_{n,n}) X^{n-1} + P = X^n - \operatorname{tr}(A) X^{n-1} + P,$$

où $P \in \mathbb{K}_{n-2}[X]$ d'après les relations coefficients racines.

- Pour toute permutation $\sigma \neq \operatorname{Id}$, il existe au moins deux entiers distincts i, j tels que $\sigma(i) \neq i$ et $\sigma(j) \neq j$ (σ ne peut pas fixer exactement $n - 1$ entiers). Alors

$$\prod_{i=1}^n (\delta_{\sigma(i),i} X - a_{\sigma(i),i}) \in \mathbb{K}_{n-2}[X]$$

Finalement, il existe $Q \in \mathbb{K}_{n-2}[X]$ tel que $\chi_A = X^n - \operatorname{tr}(A) X^{n-1} + Q$. Par ailleurs, $\chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$, donc le terme constant de χ_A est $(-1)^n \det(A)$. $\square$

Théorème - Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire, de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors les valeurs propres de A sont ses coefficients diagonaux, et

$$\det A = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n).$$

Démonstration. La matrice $XI_n - A$ est triangulaire, donc son déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux. $\square$

Théorème - Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire par blocs

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire par blocs, de blocs diagonaux carrés $A_1, \dots, A_k$, alors

$$\chi_A = \chi_{A_1} \dots \chi_{A_k}.$$

Démonstration. Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs de la forme ci-dessus est le produit des déterminants des blocs diagonaux. $\square$

Théorème - Polynôme caractéristique et matrices semblables

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont deux matrices semblables, alors $\chi_A = \chi_B$.

Démonstration. Si A, B sont semblables, il existe $P \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$, donc

$$\chi_B = \det(P^{-1}AP - XI_n) = \det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) = \det(A - \lambda I_n) = \chi_A. \quad \square$$

Remarque. On peut donc ajouter le polynôme caractéristique à la liste des invariants de similitude déjà connus (le rang, la trace, le déterminant).

4. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Comme nous venons de le voir, deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. Ainsi, toutes les matrices représentant un même endomorphisme u ont même polynôme caractéristique, qu'on notera alors χ_u .

Définition - Polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie

Si E est de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors on appelle *polynôme caractéristique* de u le polynôme caractéristique de toute matrice représentant u .

Exemple. Si $\dim E = n$ et $u = \lambda \text{Id}_E$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\chi_u = (X - \lambda)^n$: si $\mathcal{B}$ est une base de E , la matrice A de u dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \lambda I_n$, donc

$$\chi_u = \det(XI_n - A) = \begin{vmatrix} X - \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & X - \lambda \end{vmatrix} = (X - \lambda)^n.$$

Remarque. Les propriétés du polynôme caractéristique de $u \in \mathcal{L}(E)$ sont donc les mêmes que celles énoncées pour les matrices. En particulier :

- Si $\dim E = n$, alors on a $\chi_u = X^n - \text{tr}(u)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det u$.
- Les valeurs propres de u sont exactement les racines de χ_u .

Théorème - Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est supposé de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E stable par u , et u_F l'endomorphisme induit par u sur F . Alors,

$$\chi_{u_F} \mid \chi_u.$$

Démonstration. On complète une base de $\mathcal{B}_F$ de F en une base $\mathcal{B}$ de E . Comme F est stable par u , la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ s'écrit

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & \star \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right], \quad \text{où } A_1 = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u_F).$$

Ainsi, $\chi_u = \chi_M = \chi_{A_1} \chi_{A_2}$, mais on a aussi $\chi_{u_F} = \chi_{A_1}$, ce qui conclut. $\square$

Remarques.

- On déduit donc immédiatement que, avec les mêmes notations que dans le théorème, $\text{Sp}(u_F) \subset \text{Sp}(u)$.
- Si F est un sous-espace propre $E_\lambda(u)$, alors F est stable par u , et $u_F = \lambda \text{Id}_F$. Le théorème entraîne alors que $\chi_{u_F} \mid \chi_u$, c'est-à-dire $(X - \lambda)^d \mid \chi_u$, où $d = \dim F$.

5. Valeurs propres et multiplicités

Définition - Multiplicité d'une valeur propre

Si E est de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$, on appelle *multiplicité (algébrique)* d'une valeur propre λ de u sa multiplicité en tant que racine de χ_u , on la notera souvent $m(\lambda)$.

De même, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \text{Sp}(A)$, on appelle *multiplicité* de λ sa multiplicité en tant que racine de χ_A .

Exemple. Si $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, alors $\chi_A = X^2$, et 0 est valeur propre de multiplicité 2 de A . On parle aussi de valeur propre double.

Remarques.

- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ est une valeur propre complexe de A , alors comme λ est racine de $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$, $\bar{\lambda}$ l'est également, de même multiplicité. Par conséquent, les valeurs propres λ et $\bar{\lambda}$ ont même multiplicité.
- Comme pour les racines d'un polynôme, on dira que les valeurs propres de A sont comptées avec leur multiplicité quand elles sont chacune répétées autant de fois que leur multiplicité.

Théorème - Nombre de valeurs propres

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors A admet exactement n valeurs propres, comptées avec leur multiplicité.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors A admet au plus n valeurs propres, comptées avec leur multiplicité.

De plus, si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres complexes de A , comptées avec leur multiplicité, alors

$$\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \dots + \lambda_n, \quad \text{et} \quad \det A = \lambda_1 \dots \lambda_n.$$

Démonstration. On sait que $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A si et seulement si $\chi_A(\lambda) = 0$, or si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, χ_A admet n racines comptées avec multiplicité, et si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, χ_A en admet au plus n .

Par ailleurs, par les relations coefficients-racines de Viète, si $\chi_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$, alors $\lambda_1 \dots \lambda_n = (-1)^n a_0$ et $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = -a_{n-1}$. Comme $a_0 = (-1)^n \det A$ et $a_{n-1} = -\operatorname{tr} A$, on obtient le résultat. $\square$

Exemple. Si $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, alors $\chi_A = X^2 + 1$, donc $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ et $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, i\}$.

Remarques.

- Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres *complexes* de A comptées avec leur multiplicité, alors on a toujours

$$m(\lambda_1) + \dots + m(\lambda_n) = n.$$

- On notera que $\dim E_\lambda(u)$ n'est pas toujours égal à $m(\lambda)$: dans l'exemple ci-dessus, 0 est valeur propre de multiplicité 2, mais $\dim E_0(A) = 1$.

Le résultat ci-dessous montre qu'en revanche, la multiplicité algébrique est toujours au moins aussi grande que la multiplicité géométrique.

Théorème - Dimension des sous-espaces propres et multiplicité

Si E est de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ est une valeur propre de u de multiplicité $m(\lambda)$, alors

$$1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m(\lambda).$$

Remarque. De même, pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$ est de multiplicité $m(\lambda)$, alors $\dim E_\lambda(A) \leq m(\lambda)$.

Démonstration. Pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$, comme $E_\lambda(u)$ est stable par u , on peut introduire l'endomorphisme u_λ induit par u sur $E_\lambda(u)$. Par ailleurs, par définition de $E_\lambda(u)$, on a $u_\lambda = \lambda \operatorname{Id}_{E_\lambda(u)}$. Par conséquent, $\chi_{u_\lambda} = (X - \lambda)^d$, où $d = \dim E_\lambda(u)$, alors. Comme $\chi_{u_\lambda} \mid \chi_u$,

$$(X - \lambda)^d \mid \chi_u, \quad \text{donc} \quad d \leq m(\lambda).$$

Par ailleurs, comme λ est valeur propre de u , il existe un vecteur non nul $x \in E_\lambda(u)$, donc $\dim E_\lambda(u) \geq 1$. $\square$

Corollaire - Valeur propre simple

Si E est de dimension finie et λ est valeur propre simple de $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\dim E_\lambda(u) = 1$.

Démonstration. D'après le théorème, on a $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m(\lambda) = 1$. $\square$

Exemple. On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dont on cherche les valeurs propres et leur multiplicité. On remarque que $\operatorname{rg}(A - 2I_3) = \operatorname{rg} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 1$. Ainsi, $2 \in \operatorname{Sp}(A)$, et $\dim E_2(A) = \dim \operatorname{Ker}(A - 2I_3) = 2$, et $m(2) \geq 2$.

On sait que 2 est au moins valeur propre double de A . On obtient la dernière valeur propre λ en remarquant que $2 + 2 + \lambda = \operatorname{tr}(A) = 8$, ce qui donne $\lambda = 4$.

Par conséquent, 2 est valeur propre double de A , et 4 est valeur propre simple.

II Diagonalisation

Dans toute la suite, E est supposé de dimension finie n .

1. Définition

Définition-théorème - Diagonalisabilité d'un endomorphisme

On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale. Dans ce cas, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de u .

Démonstration. On sait que u et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ ont les mêmes valeurs propres, or les valeurs propres d'une matrice diagonale sont ses coefficients diagonaux. $\square$

Exemples.

1. L'application Id_E et l'application nulle sont diagonalisables.
2. Comme on l'a vu, un projecteur, une symétrie de E sont diagonalisables.

Définition - Diagonalisabilité d'une matrice carrée

Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.

Exemple. La matrice I_n et la matrice nulle sont diagonales donc évidemment diagonalisables.

Remarque. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ est une base de E , alors u est diagonalisable si et seulement si la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonalisable.

2. Conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité

Les conditions suivantes sont énoncées dans le cas d'un endomorphisme, mais sont également valables pour une matrice carrées en adaptant leur énoncé.

Théorème - Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u .

Démonstration. Si u est diagonalisable, on note $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ une base dans laquelle la matrice de u est diagonale, on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Ceci entraîne que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u(x_i) = \lambda x_i$, donc $\mathcal{B}$ est constituée de vecteurs propres. Réciproquement, si $\mathcal{B}$ est une base de vecteurs propres de u , $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale. $\square$

Remarques.

- On a un résultat analogue pour les matrices.
- Si une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable, nous avons donc montré que A est semblable à une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont exactement les valeurs propres.

Exemples.

1. Reprenons l'exemple de la matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ étudié plus haut.

Comme $\dim E_2(A) = 2$ et $\dim E_4(A) = 1$, on obtient une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ faite de vecteurs propres de A en concaténant une base de $E_2(A)$ et une base de $E_4(A)$, qui sont en somme directe. Ainsi, A est diagonalisable.

2. On considère la matrice $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Nous avons vu plus haut que $\text{Sp}(M) = \{0\}$, et $\dim E_0(B) = 1$. Ainsi, il n'existe pas de famille libre de 2 vecteurs propres, donc pas de base de diagonalisation de B , qui n'est pas diagonalisable.

Autre point de vue : comme $\text{Sp}(B) = \{0\}$, si B était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, donc elle serait nulle.

3. On considère la matrice $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

La matrice C est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous égaux à 1, donc $\text{Sp}(C) = \{1\}$. Si C était diagonalisable, elle serait semblable à $\text{diag}(1, 1) = I_2$, donc on aurait $C = I_2$. Ainsi, C n'est pas diagonalisable.

Le résultat suivant permet de caractériser la diagonalisabilité à l'aide des sous-espaces propres.

Théorème - Caractérisations de la diagonalisabilité

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il y a équivalence entre les assertions suivantes.

- i. u est diagonalisable.
- ii. $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.
- iii. $\dim E = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u)$.
- iv. χ_u est scindé, et pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$, $\dim E_\lambda(u) = m(\lambda)$.

Démonstration. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres de u et $m_i = m(\lambda_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$.

- $i. \Rightarrow ii.$: si u est diagonalisable, tout vecteur de E s'écrit comme somme de vecteurs propres. Par ailleurs, cette écriture est unique car les sous-espaces propres distincts sont en somme directe.
- $ii. \Rightarrow iii.$: c'est une conséquence du caractère direct de la somme.
- $iii. \Rightarrow iv.$: pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$, on a $\dim E_\lambda(u) \leq m(\lambda)$, donc

$$n = \dim E = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) \leq \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} m(\lambda) \stackrel{\text{car } \deg \chi_u = n}{=} n.$$

Ainsi, l'inégalité est une égalité, et $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \underbrace{(m(\lambda) - \dim E_\lambda(u))}_{\geq 0} = 0$, donc pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$, $\dim E_\lambda(u) = m(\lambda)$.

Par ailleurs, on sait que $(X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_k)^{m_k}$ divise χ_u . Comme de plus $m_1 + \dots + m_k = n$ et χ_u est unitaire, on a $\chi_u = (X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_k)^{m_k}$ qui est donc scindé.

- $iv. \Rightarrow i.$: on suppose $iv.$ Comme les sous-espaces propres sont en somme directe, on obtient une famille libre en concaténant des bases de $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$, de cardinal $\dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_k} = m_1 + \dots + m_k$. Comme χ_u est scindé, on a $\chi_u = (X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_k)^{m_k}$, et $m_1 + \dots + m_k = n$. On a alors obtenu une famille libre de n vecteurs propres de u qui est donc une base de E car de bon cardinal. Ainsi, u est diagonalisable. $\square$

Corollaire - Condition suffisante de diagonalisabilité

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et χ_u est scindé à racines simples, alors u est diagonalisable.

Démonstration. Si χ_u est scindé à racines simples, alors u n'a que des valeurs propres simples, et on sait donc que pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$, on a $\dim E_\lambda(u) = 1$, donc $\dim E_\lambda(u) = m(\lambda)$, ce qui conclut. $\square$

Remarque. En particulier, si χ_u n'est pas scindé, alors u n'est pas diagonalisable. Ceci n'est possible que sur $\mathbb{R}$, car tout polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$.

Exemple. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, car $\chi_A = X^2 + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Lorsque u est scindé, par exemple dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on cherche à vérifier si $\dim E_\lambda(u) = m(\lambda)$ pour toute valeur propre λ . Pour trouver $\dim E_\lambda(u)$, il est parfois utile de se ramener à un calcul de rang : par le théorème du rang,

$$\dim E_\lambda(u) = n - \text{rg}(u - \lambda \text{Id}_E).$$

Exemple. Etudions la diagonalisabilité de la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. On a

$$\chi_A = (X - 1)^2(X - 2).$$

Ainsi, χ_A est scindé, et A a 2 pour valeur propre simple, et 1 pour valeur propre double. Par ailleurs,

$$\dim E_1(A) = 3 - \operatorname{rg}(A - I_3) = 3 - \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 1.$$

Comme $\dim E_1(A) \neq m(1)$, la matrice A n'est pas diagonalisable.

3. Diagonalisation

On dit qu'on *diagonalise* une matrice diagonalisable $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ lorsqu'on explicite une matrice $P \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$.



Diagonalisation d'une matrice

Pour diagonaliser une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable,

1. on trouve les valeurs propres, par exemple en scindant le polynôme caractéristique,
2. pour chaque valeur propre λ , on trouve une base de $\ker(A - \lambda I_n)$,
3. on concatène ces bases pour obtenir une base de diagonalisation $\mathcal{B}'$,
4. on obtient la matrice P comme matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$:

$$P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}').$$

Dans la pratique, P est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres de A , dans l'ordre donné par la base $\mathcal{B}'$.

III Trigonalisation

On rappelle que E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie notée n .

Définition - Endomorphisme trigonalisable, matrice trigonalisable

- Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire.
- Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.

Remarque. Comme pour la diagonalisabilité, si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ est une base de E , alors u est trigonalisable si et seulement si $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est trigonalisable.

Théorème - Condition nécessaire et suffisante de trigonalisabilité

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_u est scindé.

Démonstration.

- Si u est trigonalisable, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ de E est triangulaire. Si on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de A , alors le polynôme caractéristique de u est donné par

$$\chi_u = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i), \quad \text{donc } \chi_u \text{ est scindé.}$$

- Montrons par récurrence sur n que si χ_u est scindé, alors u est trigonalisable.
 - ◊ Si $n = 1$, le résultat est évident.

- ◇ Soit $n \geq 2$. On suppose le résultat vrai en dimension $n - 1$. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim E = n$ et χ_u est scindé, alors χ_u admet au moins une racine λ , qui est donc valeur propre de u . On considère alors un vecteur propre x de u associé à λ , et on complète en une base $\mathcal{B} = (x, e_2, \dots, e_n)$ de E . Dans cette base, la matrice $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est de la forme

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array} \right]$$

car $u(x) = \lambda x$. On a $\chi_u = \chi_A = (X - \lambda)\chi_{A'}$ donc, comme χ_u est scindé, $\chi_{A'}$ l'est également. Par hypothèse de récurrence, la matrice $A' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ est donc trigonalisable, et il existe $Q \in \text{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$ telle que $Q^{-1}A'Q$ est triangulaire. On remarque que si

$$P = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{array} \right], \text{ alors } P^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & Q^{-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right], \text{ et } P^{-1}AP = \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & Q^{-1}A'Q & \\ 0 & & & \end{array} \right].$$

Ainsi, $P^{-1}AP$ est triangulaire, ce qui conclut. $\square$

Remarque. De même, une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si et seulement si χ_A est scindé.

Corollaire

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Démonstration. Comme tout polynôme de $\mathbb{C}$ est scindé, χ_A est scindé et le théorème permet de conclure. $\square$

Remarques.

- Ainsi, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \star & \cdots & \star \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres complexes de A (écrites avec multiplicité). On retrouve donc

$$\text{tr } A = \lambda_1 + \dots + \lambda_n, \quad \text{et} \quad \det A = \lambda_1 \dots \lambda_n.$$

- Il n'est pas difficile de voir que $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si et seulement s'il existe une des sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_n$ stables par u , tels que

$$E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n = E, \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \dim E_k = k.$$

La suite $E_1, \dots, E_n$ de sous-espaces vectoriels est appelée un *drapeau* de E . Une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E est dite adaptée au drapeau si $(e_1, \dots, e_k)$ est une base de E_k pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Une telle base trigonalise u .

IV Endomorphismes nilpotents

E désigne toujours un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n .

Définition – Endomorphisme nilpotent

On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est *nilpotent* s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Dans ce cas, on appelle *indice de nilpotence* de u le plus petit entier p tel que $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Remarques.

- L'endomorphisme u est nilpotent d'indice p si et seulement si $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- On introduit la même notion pour les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: une matrice est nilpotente d'indice p si A^p est nulle et A^{p-1} ne l'est pas.

- Si u est nilpotent, alors u n'est pas bijectif, sinon u^p le serait également. De même, une matrice nilpotente n'est pas inversible.

Théorème - Indice de nilpotence et dimension

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent, alors son indice p vérifie $p \leq \dim E$.

Démonstration. Comme p est l'indice de nilpotence de u , on a $u^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$, c'est-à-dire qu'il existe $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_E$. Nous allons montrer que la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est une famille libre de E , ce qui entraînera que son cardinal p ne peut excéder $\dim E$.

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0_E$. Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ tel que $\lambda_i \neq 0$. On considère alors m le plus petit entier tel que $\lambda_m \neq 0$. On a alors

$$\lambda_m u^m(x) + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0_E.$$

En composant par u^{p-m-1} , on obtient $\lambda_m u^{p-1}(x) = 0_E$, car pour tout $i > m$, $u^{p-m-1+i}(x) = u^p(u^{i-m-1}(x)) = 0_E$. Comme $u^{p-1}(x) \neq 0_E$, ceci entraîne que $\lambda_m = 0$, ce qui est en contradiction, et conclut. $\square$

Remarque. Par conséquent, si $\dim E = n$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent, alors $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Théorème - Caractérisation des endomorphismes nilpotents

Un endomorphisme u est nilpotent si et seulement si χ_u est scindé et u n'admet que 0 pour valeur propre. Autrement dit, si $\dim E = n$, u est nilpotent si et seulement si $\chi_u = X^n$.

Démonstration.

- Si u est nilpotent, considérons une valeur propre complexe de u notée λ et un vecteur propre x associé. Comme $u(x) = \lambda x$, on a $u^k(x) = \lambda^k x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme on sait que $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$, ceci entraîne que $\lambda^n x = 0_E$, puis $\lambda = 0$ car $x \neq 0_E$.

Ainsi, 0 est la seule valeur propre complexe (et donc la seule valeur propre réelle). On en déduit que $\chi_u = X^n$, qui est donc scindé.

- Si χ_u est scindé et $\text{Sp}(u) = \{0_E\}$, alors u est trigonalisable et il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & \star & \star \\ & \ddots & \star \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

On a alors $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Pour le voir, on montre par récurrence forte que $u^k(e_k) = 0_E$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Le cas $k = 1$ est clair, et si on suppose que $u(e_1) = \dots = u^{k-1}(e_{k-1}) = 0_E$, alors la forme de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ entraîne

$$u(e_k) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1}), \quad \text{donc} \quad u^k(e_k) \in \text{Vect}(u^{k-1}(e_1), \dots, u^{k-1}(e_{k-1})) = \{0_E\}.$$

Ainsi, on a en particulier $u^n(e_1) = \dots = u^n(e_n) = 0_E$, ce qui assure que $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $\square$

Remarque. On a bien sûr un résultat analogue pour les matrices.

V Quelques applications de la réduction

1. Calcul des puissances d'une matrice

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable, et si l'on dispose de $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, de la matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$, ainsi que de l'inverse de P , on peut alors calculer aisément les puissances de la matrice A en remarquant que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = PD^k P^{-1},$$

par une récurrence immédiate. Or, si $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, on a $D^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Remarque. Une application remarquable de ce résultat est l'étude de suite récurrente linéaire d'ordre p à coefficients constants. Intéressons-nous au cas $p = 2$: si $a, b \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, \quad (1)$$

alors (1) se réécrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en posant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, (1) s'écrit : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n$.

Une récurrence immédiate donne alors $U_n = A^n U_0$.

2. Résolution de systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

On s'intéresse ici à la résolution de systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants, d'inconnues les fonctions $x_1, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} x_1' &= a_{1,1}x_1 + \dots + a_{n,1}x_n \\ \vdots \\ x_n' &= a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,n}x_n \end{cases}$$

En posant $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, le système se réécrit matriciellement $X' = AX$, où $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Si A est diagonalisable, on peut écrire $A = PDP^{-1}$, où $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et D est diagonale, notée $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Le système différentiel se réécrit alors :

$$X' = AX \Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X \Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X \Leftrightarrow (P^{-1}X)' = D(P^{-1}X).$$

En effet, $P^{-1}X' = (P^{-1}X)'$ par linéarité de la dérivation. Ainsi, en posant maintenant $Y = P^{-1}X$, on est amené à résoudre le système

$$Y' = DY \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ y_n' = \lambda_n y_n \end{cases}$$

Ce dernier système se résout aisément, et il ne reste plus qu'à retrouver X en remarquant que $X = PY$.

Remarques.

- On remarquera qu'il n'est pas nécessaire de calculer P^{-1} dans le calcul ci-dessus. La donnée de la matrice de passage et de la matrice diagonale D dans la diagonalisation de A suffisent.
- Lorsque A n'est pas diagonalisable, mais trigonalisable (c'est le cas si on se place dans $\mathbb{C}$ par exemple), on peut procéder de la même manière, à la différence que le système différentiel obtenu pour Y n'est plus diagonal mais triangulaire. Ce dernier peut se résoudre pas à pas en remontant, comme pour les systèmes linéaires triangulaires.

Exemple. Nous cherchons à résoudre le système d'équations différentielles sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x' &= x & + 2z \\ y' &= & y \\ z' &= 2x & + z \end{cases}$$

On remarque que le système d'équations différentielles se réécrit $X' = AX$, où $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Or A a pour valeurs propres 1, -1 et 3, donc elle est diagonalisable. Par ailleurs,

$$\text{Ker}(A - I_3) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Ker}(A + I_3) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{Ker}(A - 3I_3) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $A = PDP^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Si $\tilde{X} = P^{-1}X$, on note $\tilde{X} : t \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{pmatrix}$.

Le système $X' = AX$ équivaut à $\tilde{X}' = D\tilde{X}$, qui est diagonal :

$$\begin{cases} \tilde{x}' &= \tilde{x} \\ \tilde{y}' &= -\tilde{y} \\ \tilde{z}' &= 3\tilde{z} \end{cases}$$

dont les solutions sont données par : $\tilde{x} : t \mapsto \alpha e^t$, $\tilde{y} : t \mapsto \beta e^{-t}$, $\tilde{z} : t \mapsto \gamma e^{3t}$, où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Ainsi, les solutions du système de départ sont données par

$$X = P\tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{y} + \tilde{z} \\ \tilde{x} \\ -\tilde{y} + \tilde{z} \end{pmatrix}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) = \beta e^{-t} + \gamma e^{3t} \\ y(t) = \alpha e^t \\ z(t) = -\beta e^{-t} + \gamma e^{3t} \end{cases} \quad \text{avec } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$