

Chapitre 2

Déterminants

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n désigne un entier non nul.

I Généralités

1. Signature d'une permutation

On rappelle que toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ peut s'écrire comme un produit de cycles disjoints, ainsi que comme un produit de transpositions.

Exemple. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_6$ est donnée par $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, alors $\sigma = (1\ 4\ 3\ 5)(2\ 6)$, puis on obtient le produit de transpositions :

$$\sigma = (1\ 4)(4\ 3)(3\ 5)(2\ 6).$$

Remarque. Comme vu en 1ère année, le nombre de transpositions dans la décomposition d'une permutation en produit de transpositions n'est pas unique, mais sa parité l'est.

Signature. On rappelle que la signature $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \rightarrow \{-1, 1\}$ est un morphisme de groupe tel que pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si le nombre de transpositions dans la décomposition de } \sigma \text{ est pair,} \\ -1 & \text{si le nombre de transpositions dans la décomposition de } \sigma \text{ est impair.} \end{cases}$$

Remarque. On peut aussi trouver la signature d'une permutation à partir de la décomposition en produit de cycles disjoints (unique à ordre des facteurs près), en remarquant que si σ est un k -cycle, alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{k-1}$.

Exemple. Si, comme dans l'exemple précédent, $\sigma = (1\ 4\ 3\ 5)(2\ 6)$, alors :

- comme $\sigma = (1\ 4)(4\ 3)(3\ 5)(2\ 6)$, on a $\varepsilon(\sigma) = 1$,
- alternativement, on peut écrire $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon((1\ 4\ 3\ 5)) \times \varepsilon((2\ 6)) = (-1)^3 \times (-1) = 1$.

2. Déterminant d'une famille de vecteurs, d'une matrice carrée

Définition - Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E . Si $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$, alors

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}.$$

Remarque. On prendra garde au fait que dans un espace vectoriel de dimension n , seul le déterminant d'une famille de n vecteurs est défini.

Théorème

Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E , alors $\det_{\mathcal{B}}$ est l'unique forme n -linéaire alternée sur E telle que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

De plus, toute forme n -linéaire alternée f sur E s'écrit $f = \alpha \det_{\mathcal{B}}$, avec $\alpha \in \mathbb{K}$.

Théorème - Déterminants et bases

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E .

- i. La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.
- ii. *Changement de base* : $\det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.

Définition - Déterminant d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *déterminant* de A le déterminant de la famille des colonnes de A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On le note $\det A$ ou encore $|A|$. On a donc, si $a_1, \dots, a_n$ désignent les colonnes de A ,

$$\det A = \det_{\mathcal{B}}(a_1, \dots, a_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i}.$$

Remarques.

- L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme n -linéaire alternée par rapport aux colonnes.
- Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $x_1, \dots, x_n \in E$, alors par définition de $\det_{\mathcal{B}}$ et du déterminant d'une matrice,

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)). \quad (1)$$
- On remarque que $\det A$ est une expression polynomiale en les coefficients de la matrice A .

Théorème - Propriétés du déterminant d'une matrice carrée

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- i. $\det I_n = 1$.
- ii. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.
- iii. $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.
- iv. A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$, et dans ce cas $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.
- v. $\det A^T = \det A$.

II Méthodes de calcul de déterminant**1. Déterminant d'une matrice triangulaire****Théorème - Déterminant d'une matrice triangulaire**

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses termes diagonaux.

Démonstration. On traite le cas où $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, s'il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\sigma(i) > i$, alors $a_{\sigma(i), i} = 0$, donc $a_{\sigma(1), 1} \dots a_{\sigma(n), n} = 0$. Or, par une récurrence immédiate, la seule permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\sigma(i) \leq i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ est $\sigma = \text{Id}$. Par conséquent, on a $\det A = a_{1,1} \dots a_{n,n}$. $\square$

2. Déterminant et opérations élémentaires**Théorème - Déterminant et opérations élémentaires**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $\hat{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est obtenue à partir de A :

- en échangeant deux colonnes, alors $\det \hat{A} = -\det A$,
- en multipliant une colonne par $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\det \hat{A} = \lambda \det A$,
- en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres, alors $\det \hat{A} = \det A$.

Les résultats ci-dessus sont encore valables pour les lignes.

Remarque. Ceci entraîne qu'on peut toujours calculer le déterminant d'une matrice en se ramenant au déterminant d'une matrice triangulaire par pivot de Gauss.

Exemple. Soit $a \in \mathbb{K}$. Déterminons le déterminant de la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & a \end{pmatrix}$.

$C_1 \leftarrow C_1 + \dots + C_n$ $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ $L_n \leftarrow L_n - L_1$

$$|A| = (a+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix} = (a+n-1) \begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+n-1)(a-1)^{n-1}.$$

3. Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Notation

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $A^{(i,j)}$ la matrice extraite obtenue à partir de A en éliminant la ligne i et la colonne j .

Définition - Mineurs, cofacteurs

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- On appelle *mineur* de A d'indices i, j le déterminant de $A^{(i,j)}$, on le note $\Delta_{i,j}$.
- On appelle *cofacteur* de A d'indices i, j le scalaire $(-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$.

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors $A^{(2,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, donc $\Delta_{2,3} = 1$. Le cofacteur de A d'indices 2, 3 est -1 .

Théorème - Développement par rapport à une ligne, une colonne

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- Développement par rapport à la ligne i : on a $\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$.
- Développement par rapport à la colonne j : on a $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$.

Signe de $(-1)^{i+j}$:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Démonstration. Montrons le résultat sur les colonnes, celui sur les lignes s'en déduit par transposition. Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On note $a_1, \dots, a_n$ les colonnes de A , et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

$$\det A = \det_{\mathcal{B}}(X_1, \dots, X_n) = \det \left(a_1, \dots, \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i, \dots, a_n \right) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \det_{\mathcal{B}}(a_1, \dots, e_i, \dots, a_n)$$

par n -linéarité. En notant $D_{i,j} = \det_{\mathcal{B}}(a_1, \dots, e_i, \dots, a_n)$, on a :

$$D_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} & 0 \\ a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} & 1 \end{vmatrix},$$

où on a effectué les échanges de colonnes $C_j \leftrightarrow C_{j+1}, \dots, C_{n-1} \leftrightarrow C_n$ et de lignes $L_i \leftrightarrow L_{i+1}, \dots, L_{n-1} \leftrightarrow L_n$, soit $(n-j-1) + (n-i-1)$ transpositions au total, d'où le facteur $(-1)^{2n-i-j-2} = (-1)^{i+j}$. On conclut avec la remarque du paragraphe 1 : $D_{i,j} = (-1)^{i+j} |A^{(i,j)}|$. $\square$

Exemples.

- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors en développant par rapport à la dernière colonne :

$$|A| = -1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6.$$

- Soit $a \in]-1, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminons le déterminant de

$$A_n = \begin{pmatrix} 1+a^2 & a & \dots & \dots & a \\ a & 1+a^2 & a & \dots & a \\ \vdots & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1+a^2 & a \\ 0 & \vdots & \vdots & a & 1+a^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Si $n \geq 3$, on obtient en développant par rapport à la première colonne :

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & \dots & \dots & a \\ a & 1+a^2 & a & \dots & a \\ 0 & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1+a^2 & a \\ 0 & \vdots & \vdots & a & 1+a^2 \end{vmatrix} = (1+a^2) |A_{n-1}| - a \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1+a^2 & a & \dots & a \\ 0 & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1+a^2 & a \\ 0 & \vdots & \vdots & a & 1+a^2 \end{vmatrix}$$

Ainsi, en développant par rapport à la première colonne dans cette dernière matrice,

$$|A_n| = (1+a^2)|A_{n-1}| - a^2|A_{n-2}|.$$

On résout la récurrence linéaire d'ordre 2 en remarquant que son équation caractéristique $X^2 - (1+a^2)X + a^2$ a pour racines 1 et a^2 , et $|A_1| = 1+a^2$ et $|A_2| = 1+a^2+a^4$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |A_n| = \frac{1-a^{2(n+1)}}{1-a^2} = \sum_{k=0}^n a^{2k}.$$

4. Déterminant de Vandermonde**Théorème - Déterminant de Vandermonde**

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, on note

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

On a $V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

Démonstration. On montre le résultat par récurrence sur n .

- Cas $n = 1$. On a $V(x_1) = 1$, et le produit ci-dessus est vide donc égal à 1. Ainsi, le résultat est vrai pour $n = 1$.
 – Soit un entier $n \geq 2$. On suppose que le résultat est vrai pour $n - 1$, et on le montre au rang n . On considère $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. On a en effectuant les opérations $C_n \leftarrow C_n - x_1 C_{n-1}, \dots, C_2 \leftarrow C_2 - x_1 C_1$:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & \dots & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & \dots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \dots & (x_2 - x_1) x_2^{n-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_1 & \dots & (x_n - x_1) x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

où on a développé par rapport à la première ligne dans ce dernier calcul. Ainsi, en factorisant :

$$V(x_1, \dots, x_n) = (x_2 - x_1) \dots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{j=1}^n (x_j - x_1) V(x_2, \dots, x_n).$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a alors $V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n (x_j - x_1) \prod_{2 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$, d'où le résultat en regroupant les produits. $\square$

Remarque. En particulier, si $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice de Vandermonde $(x_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq n}$ est inversible si et seulement si les scalaires $x_1, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts.

Ce résultat peut se retrouver plus simplement en remarquant que, en notant $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$, $\mathcal{B}'$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, et

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_{n-1}[X] & \rightarrow & \mathbb{K}^n \\ P & \mapsto & (P(x_1), \dots, P(x_n)) \end{array} \quad \text{on a} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

- S'il existe deux scalaires x_i égaux, alors la matrice de Vandermonde a deux lignes égales, elle n'est donc pas inversible.
- Sinon, $\text{Ker } f = \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ car tout polynôme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ qui a n racines est nul. Par conséquent, f est un isomorphisme et la matrice de Vandermonde est inversible.

On peut également voir que f est un bijetif si les x_i sont deux à deux distincts en se rappelant que tout n -uplet $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ a un unique antécédent par f donné par le polynôme interpolateur de Lagrange associé.

5. Déterminant des matrices définies par blocs

Définition-théorème - Transvection par blocs

Soit A une matrice définie par blocs $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i, p_j}(\mathbb{K})$. Si $M \in \mathcal{M}_{n_i, n_j}(\mathbb{K})$, on pose

$$T_{i,j}(M) = \begin{bmatrix} I_{n_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & I_{n_i} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I_{n_j} & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & I_{n_N} \end{bmatrix}$$

Alors la matrice $T_{i,j}(M)A$ est la matrice obtenue à partir de A en effectuant l'opération $L_i \leftarrow L_i + ML_j$, c'est-à-dire que les blocs $A_{i,k}$ de la ligne i sont remplacés par $A_{i,k} + MA_{j,k}$.

Démonstration. Le résultat découle directement du produit par blocs des matrices. □

Corollaire - Invariance du déterminant et du rang par transvection par blocs

Soient A une matrice définie par blocs $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i, p_j}(\mathbb{K})$ et $M \in \mathcal{M}_{n_i, n_j}(\mathbb{K})$.

- La transvection par blocs $L_i \leftarrow L_i + ML_j$ ne change pas le rang de A .
- Si A est carrée, la transvection par blocs $L_i \leftarrow L_i + ML_j$ ne change pas le déterminant de A .

Démonstration. Il suffit de remarquer que $T_{i,j}(M)$ est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous égaux à 1, donc $\det(T_{i,j}(M)) = 1$, et $T_{i,j}(M)$ est inversible.

Par conséquent, $\text{rg}(T_{i,j}(M)A) = \text{rg } A$, et $\det(T_{i,j}(M)A) = \det T_{i,j}(M) \det A = \det A$. □

Théorème - Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Si A une matrice triangulaire par blocs :

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & \star & \dots & \star \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ & & & A_{n,n} \end{bmatrix}$$

dont les blocs diagonaux $A_{1,1}, \dots, A_{n,n}$ sont carrés, alors $\det A = \det(A_{1,1}) \dots \det(A_{n,n})$.

Démonstration. Montrons le résultat pour $n = 2$. Le cas général s'en déduit de manière immédiate par récurrence sur n . On remarque que

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline 0 & A_{2,2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} I & A_{1,2} \\ \hline 0 & A_{2,2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} A_{1,1} & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right],$$

où I désigne à chaque fois la matrice identité de taille adaptée. Or en développant successivement par rapport aux premières colonnes pour la première matrice, et par rapport aux dernières colonnes pour la seconde, on obtient

$$\det \left[\begin{array}{c|c} I & A_{1,2} \\ \hline 0 & A_{2,2} \end{array} \right] = \det A_{2,2}, \quad \text{et} \quad \det \left[\begin{array}{c|c} A_{1,1} & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] = \det A_{1,1}.$$

On a donc bien $\det A = \det(A_{1,1}) \det(A_{2,2})$. □

Remarque. En particulier, si A est diagonale par blocs de blocs diagonaux carrés $A_1, \dots, A_n$, alors son déterminant est le produit des déterminants diagonaux : $\det A = \det(A_1) \dots \det(A_n)$.

⚠ En général, on a $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \neq \det(A) \det(D) - \det(B) \det(C)$, même si les blocs sont carrés.

6. Comatrice et inverse

Définition - Comatrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *comatrice* de A la matrice dont les coefficients sont les cofacteurs de A , on la note $\text{Com}(A)$: pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\text{Com}(A)_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}.$$

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\text{Com}(A) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Théorème - Inverse et comatrice

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Com}(A)^\top.$$

Démonstration. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a

$$(A \text{Com}(A)^\top)_{i,i} = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \text{Com}(A)_{i,j} = \sum_{j=1}^n a_{i,j} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j} = \det A$$

car on reconnaît le développement de A par rapport à la ligne i . Si maintenant $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $i \neq j$, alors

$$(A \text{Com}(A)^\top)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \text{Com}(A)_{j,k} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} (-1)^{j+k} \Delta_{j,k}.$$

On reconnaît cette fois le développement par rapport à la ligne j de la matrice obtenue à partir de A en remplaçant sa ligne j par sa ligne i . Comme cette dernière matrice a deux lignes égales, elle est de déterminant nul. Ceci entraîne que $(A \text{Com}(A)^\top)_{i,j} = 0$. Nous avons donc bien montré que $A \text{Com}(A)^\top = (\det A) I_n$.

La seconde égalité se montre de la même manière, en faisant cette fois intervenir des développements par rapport aux colonnes. □

Remarque. La relation ci-dessus sera utilisée essentiellement dans un contexte théorique, sauf éventuellement dans le calcul d'inverse de matrices de $\text{GL}_3(\mathbb{K})$. Elle fournit certes une expression explicite de l'inverse d'une matrice, mais le coût de calcul de $\frac{1}{\det A} \text{Com}(A)^\top$ est souvent bien supérieur aux méthodes d'inversion connues.

III Déterminant d'un endomorphisme

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Nous avons vu que deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont même déterminant. Par conséquent toutes les matrices d'un endomorphisme fixé $f \in \mathcal{L}(E)$ ont même déterminant. Ce scalaire sera défini comme le déterminant de l'endomorphisme f .

Définition-théorème - Déterminant d'un endomorphisme

Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , on appelle *déterminant* de f le scalaire

$$\det(f) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}} f).$$

Ainsi défini, le scalaire $\det f$ ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$, et $\det f = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Théorème

Soient $x_1, \dots, x_n \in E$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On a

$$\det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \det(f) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) &= \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n))) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)) \\ &= \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)), \end{aligned}$$

d'où le résultat car $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \det f$ et $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$. $\square$

Il est intéressant d'avoir une interprétation géométrique du déterminant d'une famille de vecteurs en terme de "volume" dans $\mathbb{R}^n$. Nous proposons ici cette interprétation sans démonstration, ces résultats dépassant le cadre du programme.

Interprétation géométrique. On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et on considère une base $\mathcal{B}' = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

- Cas $n = 2$. La quantité $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2)$ est égale à l'aire du parallélogramme porté par les vecteurs x_1, x_2 .
- Cas $n = 3$. La quantité $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, x_3)$ est égale au volume du parallélépipède porté par x_1, x_2, x_3 .

Plus généralement, le réel $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ est égal au volume n -dimensionnel (algébrique) du parallélépipède porté par les vecteurs $x_1, \dots, x_n$. Ainsi, l'égalité

$$\det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \det(f) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

valable pour tout $(x_1, \dots, x_n)$ exprime que l'endomorphisme f multiplie les volumes par un facteur constant, donné par $\det(f)$.

Nous terminons par des propriétés du déterminant d'un endomorphisme, qui sont immédiatement déduites des propriétés du déterminant d'une matrice carrée.

Théorème - Propriétés du déterminant d'un endomorphisme

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On a :

- ◇ $\det(\text{Id}_E) = 1$,
- ◇ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$,
- ◇ $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$,
- ◇ f est un automorphisme de E si et seulement si $\det f \neq 0$, et dans ce cas $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$.