

Chapitre 1

Algèbre linéaire

Ce chapitre est consacré à des révisions d'algèbre linéaire de 1ère année. Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Matrices

Rappelons quelques principes de base du produit matriciel, qui seront très utiles pour la suite : si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors le produit AB est une matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont donnés par :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}.$$

Si on note $L_i(A)$ la i ème ligne de A et $C_j(B)$ la j ème colonne de B , alors $(AB)_{i,j}$ est le produit matriciel de $L_i(A)$ par $C_j(B)$: pour tous i, j ,

$$(AB)_{i,j} = L_i(A) C_j(B).$$

Théorème - Produit avec une matrice colonne ou une matrice ligne

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Si $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, alors $AX = \sum_{k=1}^p x_k C_k(A)$, où $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$.

En particulier, $A \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ est la i -ème colonne de A .

- Si $X \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, alors $XA = \sum_{k=1}^n x_k L_k(A)$, où $X = (x_1 \ \cdots \ x_n)$.

En particulier, $(0 \ \cdots \ 1 \ \cdots \ 0) A$ est la i -ème ligne de A .

L'écriture du produit à l'aide des colonnes de la deuxième matrice est à particulièrement bien comprendre, et s'avère très utile.

Produit AB avec les colonnes de B . Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

$$\text{Si } B = \left[\begin{array}{c|c|c} X_1 & \cdots & X_q \end{array} \right], \text{ alors } AB = \left[\begin{array}{c|c|c} AX_1 & \cdots & AX_q \end{array} \right].$$

On retiendra plus généralement la possibilité de calculer le produit par colonne, où chaque colonne de AB est combinaison linéaire des colonnes de A , ou par lignes, où chaque ligne est combinaison linéaire des lignes de B :

$$\left[\begin{array}{c} A \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} B \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^p b_{i,j} C_i(A) \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^p a_{i,j} L_j(B) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} B \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^p a_{i,j} L_j(B) \end{array} \right]$$

II Espaces vectoriels

1. Généralités

On se contente ici de rappeler les exemples de référence de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

Le corps de base : $\mathbb{K}$ muni de ses lois $+$ et $\times$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Matrices : $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni de l'addition des matrices et de la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Polynômes : $\mathbb{K}[X]$ muni de l'addition des polynômes et de la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Applications : $\mathcal{F}(X, E)$, où E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et X un ensemble quelconque, muni de l'addition des fonctions et de la multiplication par un scalaire : si $f, g \in \mathcal{F}(X, E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x), \quad \lambda f : x \mapsto \lambda f(x),$$

est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Suites : $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ muni de l'addition des suites et de la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Il s'agit d'un cas particulier du cas précédent.

Espace produit : Si E, F sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, alors le produit $E \times F$ est également un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni des lois $+$ et $\cdot$: si $(x, y), (x', y') \in E \times F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \lambda \cdot (x, y) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y).$$

Plus généralement, si $E_1, \dots, E_n$ sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, alors $E_1 \times \dots \times E_n$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel pour les lois produits.

Exemple : $\mathbb{K}^n$, et en particulier $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, sont des espaces vectoriels.

Définition - $\mathbb{K}$ -algèbre

Un ensemble A muni de deux lois internes $+$ et $\times$, ainsi que d'une loi externe $\cdot$ est appelé une $\mathbb{K}$ -algèbre si :

- $(A, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
- $(A, +, \times)$ est un anneau,
- pour tous $x, y \in A$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot (x \times y) = (\lambda \cdot x) \times y = x \times (\lambda \cdot y)$.

Exemples. Les espaces $(\mathbb{K}[X], +, \cdot, \times)$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot, \times)$, $(\mathcal{F}(X, \mathbb{K}), +, \cdot, \times)$ où X est un ensemble, $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ où E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, sont des $\mathbb{K}$ -algèbres.

2. Combinaisons linéaires

Définition - Combinaison linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

- Si $x_1, \dots, x_n \in E$, on appelle combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ tout vecteur de E de la forme $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$, où $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille de $\mathbb{K}$.
- Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque de vecteurs de E , on appelle combinaison linéaire de $(x_i)_{i \in I}$ toute combinaison linéaire d'un nombre fini de x_i . On peut l'écrire $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$, où $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille presque nulle de $\mathbb{K}$.

Exemple. $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$.

3. Sous-espaces vectoriels

Définition-théorème - Sous-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On dit que $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E si $F \neq \emptyset$, et

$$\forall x, y \in F, \quad x + y \in F, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in F, \quad \lambda \cdot x \in F,$$

autrement dit, F est non vide et stable par combinaison linéaire. F est alors lui-même un espace vectoriel.

Exemples.

- $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
- Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$, $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.
- Les ensembles $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème - Intersection de sous-espaces vectoriels

Toute intersection de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E .

⚠ En revanche, comme pour les groupes, l'union de deux sous-espaces vectoriels F et G de E n'est pas toujours un sous-espace vectoriel. On peut même montrer, toujours comme pour les groupes, que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$ (voir TD).

4. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Définition-théorème - Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Soit A une partie d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . L'intersection de tous les sous-espaces vectoriels contenant A est notée $\text{Vect}(A)$.

- L'ensemble $\text{Vect}(A)$ définit un sous-espace vectoriel contenant A , qui est le plus petit au sens de l'inclusion : si F est un sous-espace vectoriel de E , alors

$$A \subset F \Rightarrow \text{Vect}(A) \subset F.$$

- Le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de A .

Exemples.

- $\text{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$.
- Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors $\text{Vect}(F) = F$.



Montrer que F est un sous-espace vectoriel

Pour montrer que $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel, on peut donc alternativement :

- montrer que $0_E \in F$, et que F est stable par combinaison linéaire.
- décrire F comme l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs particulière de E .

On privilégiera la seconde option dès que possible, car elle fournit une famille génératrice de F .

Exemples.

◇ $\mathbb{K}_n[X] = \text{Vect}(1, X, \dots, X^n)$, et $\mathbb{K}[X] = \text{Vect}(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$.

◇ Si $F = \{(x, y, -2x + y), x, y \in \mathbb{R}\}$, alors

$$F = \{x(1, 0, -2) + y(0, 1, 1), x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 0, -2), (0, 1, 1)).$$

◇ Dans $\mathbb{K}[X]$, $\{aX^2 + bX - a, a, b \in \mathbb{K}\} = \text{Vect}(X^2 - 1, X)$.

Théorème - Propriétés des sous-espaces vectoriels engendrés

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots, x_n \in E$.

i. Si x_n est combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \dots, x_{n-1}$ alors

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

ii. Ajouter à un vecteur une combinaison linéaire des autres, ou multiplier un vecteur par un scalaire non nul ne change pas le sous-espace vectoriel engendré :

- si $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$, alors $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \text{Vect}\left(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i\right)$.
- si $\lambda \in \mathbb{K}^*$, alors $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \text{Vect}(x_1, \dots, \lambda x_n)$.

Ces deux propriétés s'étendent à une famille quelconque de vecteurs de E .

Exemple. $F = \text{Vect}((1, 2, 1), (-1, 1, 0), (2, 1, 1)) = \text{Vect}((1, 2, 1), (0, 3, 1), (0, -3, -1)) = \text{Vect}((1, 2, 1), (0, 3, 1))$.

5. Familles remarquables de vecteurs

Définition - Famille génératrice

On dit qu'une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est *génératrice* de E , ou encore que la famille $(x_i)_{i \in I}$ *engendre* E si $E = \text{Vect}(x_i)_{i \in I}$. Cela revient à dire que tout vecteur de E est combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i \in I}$.

Exemples.

- Si $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = x + y\}$, alors $F = \{(x, y, x + y), x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 1))$, donc la famille $((1, 0, 1), (0, 1, 1))$ est génératrice de F .
- Si $G = \{P \in \mathbb{R}[X], P(1) = P(2) = 0\}$, alors $G = \{(X - 1)(X - 2)Q, Q \in \mathbb{R}[X]\} = \text{Vect}(X^k(X - 1)(X - 2))_{k \in \mathbb{N}}$, donc la famille $(X^k(X - 1)(X - 2))_{k \in \mathbb{N}}$ est génératrice de G .

Définition - Famille libre

On dit qu'une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est *libre* si la seule combinaison linéaire nulle de la famille a tous ses coefficients nuls : pour toute famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ presque nulle de $\mathbb{K}$,

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0.$$

Si $(x_i)_{i \in I}$ n'est pas libre, on dit qu'elle est liée.

Théorème - Famille de polynômes à degrés échelonnés

Une famille $(P_1, \dots, P_n)$ de $\mathbb{K}[X]$ est dite à degrés échelonnés si $0 \leq \deg P_1 < \dots < \deg P_n$, elle est alors libre.

Remarque. Plus généralement, toute famille de polynômes non nuls à degrés deux à deux distincts est libre.

Définition - Base d'un espace vectoriel

On appelle base de E une famille de vecteurs de E qui est libre et génératrice.

Exemples. Les exemples qui suivent proviennent des exemples précédents, nous avons vu que les familles suivantes sont à la fois libres et génératrices, et sont donc des bases. Elles ont en commun d'être les bases "naturelles" dans leur espace vectoriel. On dit qu'il s'agit de bases *canoniques*.

- **Base canonique de $\mathbb{K}^n$** : $((1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1))$.
- **Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$** : $(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$. Par exemple :

◇ la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

◇ la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, encore noté $\mathbb{K}^n$.

- **Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$** : $(1, X, \dots, X^n)$.
- **Base canonique de $\mathbb{K}[X]$** : $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Théorème et définition – Coordonnées dans une base

Une famille $\mathcal{B} = (x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est une base si et seulement si tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $(x_i)_{i \in I}$: il existe une unique famille presque nulle $(\lambda_i)_{i \in I}$ de $\mathbb{K}$ telle que

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i.$$

Les coefficients λ_i sont alors appelés les *coordonnées* de x dans la base $\mathcal{B}$.

Polynômes interpolateurs de Lagrange. Soient $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. On introduit les polynômes *interpolateurs de Lagrange* $L_0, \dots, L_n$ associés aux points $x_0, \dots, x_n$, donnés par

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{X - x_k}{x_i - x_k}. \quad \text{Alors, } L_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

La famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

6. Dimension finie

Définition – Espace vectoriel de dimension finie

Un espace vectoriel est dit *de dimension finie* s'il admet une famille génératrice de cardinal fini.

Exemples.

1. $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont des espaces vectoriels de dimension finie.
2. $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

Lemme – Lemme de Steinitz

Si E est un espace vectoriel de dimension finie possédant une famille génératrice de cardinal n , alors toute famille libre de E est au plus de cardinal n .

Théorème – Théorème de la base incomplète, de la base extraite

Si E un espace vectoriel de dimension finie,

- on peut compléter toute famille libre de E en une base de E ,
- on peut extraire une base de E de toute famille génératrice de E .

Par conséquent, tout espace vectoriel de dimension finie possède une base.

Définition-théorème – Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors ses bases ont même cardinal, appelé *dimension* de E .

Exemples.

1. Les bases rencontrées précédemment permettent d'affirmer :

$$\dim \mathbb{K}^n = n, \quad \dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np, \quad \dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1.$$

2. *Matrices symétriques, antisymétriques.* On a :

$$\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Démonstration.

- Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, on a $A = \sum_{i=1}^n a_{i,i} E_{i,i} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} (E_{i,j} + E_{j,i}) \in \text{Vect}(\mathcal{F})$, où $\mathcal{F}$ est la concaténation des familles
 $\mathcal{F}_1 = (E_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$, et $\mathcal{F}_2 = (E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}$.

On voit aisément que $\mathcal{F}$ est libre, c'est donc une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. Par ailleurs, $|\mathcal{F}_1| = n$ et

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_2| &= |\{(i, j) \in \mathbb{N}^2, 1 \leq i < j \leq n\}| = \left| \bigsqcup_{j=1}^n \{(i, j) \in \mathbb{N}^2, 1 \leq i \leq j-1\} \right| \\ &= \sum_{j=1}^n |\{(i, j) \in \mathbb{N}^2, 1 \leq i \leq j-1\}|. \end{aligned}$$

Finalement, $|\mathcal{F}_2| = \sum_{j=1}^n j-1 = \sum_{j'=0}^{n-1} j' = \frac{n(n-1)}{2}$. Ainsi, $|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_1| + |\mathcal{F}_2| = \frac{n(n+1)}{2}$.

- Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, on a $A = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} (E_{i,j} - E_{j,i}) \in \text{Vect}(\mathcal{F}_3)$, où $\mathcal{F}_3 = (E_{i,j} - E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}$.

Ainsi, $\mathcal{F}_3$, libre et génératrice, est une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, or $|\mathcal{F}_3| = |\mathcal{F}_2| = \frac{n(n-1)}{2}$. $\square$

3. *Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.* Si $a, b \in \mathbb{K}$, alors

$$F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de dimension 2.

Démonstration. On remarque que $0_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}} \in F$ et F est stable par combinaison linéaire, donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Par ailleurs, les suites $v, w \in F$ définies par

$$\begin{cases} v_0 = 1, v_1 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n, \end{cases} \quad \begin{cases} w_0 = 0, w_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = aw_{n+1} + bw_n. \end{cases}$$

La famille (v, w) est libre car aucune des deux suites n'est multiple de l'autre. D'autre part, si $u \in F$, alors les suites u et $u_0v + u_1w$ sont dans F et ont les mêmes deux premiers termes, elles sont donc égales. Ainsi, $u = u_0v + u_1w \in \text{Vect}(v, w)$, et on a $F = \text{Vect}(v, w)$.

Finalement, (v, w) est libre et génératrice de F , c'est donc une base de F , et $\dim F = 2$. $\square$

Théorème - Cardinal des familles libres, des familles génératrices

Si E est un espace vectoriel de dimension finie n , alors :

- Toute famille libre de E a au plus n vecteurs.
- Toute famille génératrice de E a au moins n vecteurs.

Remarque. En particulier, si E possède une famille génératrice de cardinal k , alors $\dim E \leq k$.

Si $\dim E = n$, il suffit de vérifier qu'une famille de cardinal n est libre, ou de vérifier qu'elle est génératrice pour en déduire qu'il s'agit d'une base de E . Une famille de cardinal $\dim E$ est dite *de bon cardinal*.

Théorème - Familles de bon cardinal

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F}$ une famille de E de cardinal n . Alors

$$\mathcal{F} \text{ est libre} \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ est génératrice} \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ est une base.}$$

Exemple. Si $n \in \mathbb{N}$, une famille $(P_0, \dots, P_n)$ échelonnée en degré de $\mathbb{K}_n[X]$ est une base : elle est libre et de bon cardinal.

Théorème - Dimension d'un produit cartésien d'espaces vectoriels

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, alors $E \times F$ est de dimension finie, et

$$\dim E \times F = \dim E + \dim F.$$

Théorème - Dimension des sous-espaces vectoriels en dimension finie

Si E est de dimension finie et F est un sous-espace vectoriel de E , alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$. De plus,

$$\dim F = \dim E \Leftrightarrow F = E.$$

Remarque. Ainsi, si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E tels que $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$, alors $F = G$.

7. Rang d'une famille de vecteurs

Définition - Rang d'une famille de vecteurs

Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_k)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E . On appelle *rang* de la famille $\mathcal{F}$, noté $\text{rg } \mathcal{F}$, la dimension de l'espace vectoriel engendré par cette famille :

$$\text{rg}(x_1, \dots, x_k) = \dim(\text{Vect}(x_1, \dots, x_k)).$$

Remarque. Le rang de $\mathcal{F}$ correspond au cardinal de la plus grande sous-famille libre contenue dans $\mathcal{F}$.

Exemple. Dans $\mathbb{K}[X]$, on a $\text{rg}(1, X, X^2) = \dim \text{Vect}(1, X, X^2) = \dim \mathbb{K}_2[X] = 3$.

Les opérations qui ne changent pas l'espace vectoriel engendré ne changent pas non plus le rang. En particulier, les opérations de la méthode du pivot de Gauss laissent le rang invariant. Ceci simplifie parfois le calcul du rang.

Exemples.

- On a $\text{rg}((1, 1, 2), (2, 1, -1), (-4, 1, 17)) = \text{rg}((1, 1, 2), \overbrace{(0, -1, -5)}^{=u_2-2u_1}, \overbrace{(0, 5, 25)}^{=u_3+4u_1}) = \text{rg}((1, 1, 2), (0, -1, -5)) = 2$, car les vecteurs $(1, 1, 2)$ et $(0, -1, -5)$ sont non colinéaires, donc ils forment une famille libre.
- On a $\text{rg}(X^2 - 1, X + 1, X^2 - X) = \text{rg}(X^2 - 1, X + 1, -X + 1) = \text{rg}(X^2 + 1, X + 1, 2) = 3$, car cette dernière famille est échelonnée en degré. Ainsi, $(X^2 - 1, X + 1, X^2 - X)$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

Théorème - Cardinal d'une famille, dimension de E et rang

Si $(x_1, \dots, x_k)$ est une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E , alors

- ◇ $\text{rg}(x_1, \dots, x_k) \leq k$ et $\text{rg}(x_1, \dots, x_k) \leq n$,
- ◇ $\text{rg}(x_1, \dots, x_k) = k \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_k)$ est libre.
- ◇ $\text{rg}(x_1, \dots, x_k) = n \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_k)$ est génératrice de E .

8. Somme de sous-espaces vectoriels

Définition-théorème - Somme de deux sous-espaces vectoriels

On appelle somme de deux sous-espaces vectoriels F et G de E l'ensemble

$$F + G = \{x + y, x \in F, y \in G\}.$$

$F + G$ est un sous-espace vectoriel de E , il s'agit du plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient F et G .

Par ailleurs, on a :

$$F + G = \text{Vect}(F \cup G).$$

Remarque. Si $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ et $G = \text{Vect}(y_1, \dots, y_m)$, où $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in E$, alors

$$F + G = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m).$$

Plus généralement, si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille de vecteurs de E et $J \subset I$, alors $\text{Vect}(x_i)_{i \in I} = \text{Vect}(x_i)_{i \in J} + \text{Vect}(x_i)_{i \in I \setminus J}$.

Définition – Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

On dit que la somme de deux sous-espaces vectoriels F et G de E est *directe* si tout vecteur $x \in F + G$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_F + x_G$, où $x_F \in F$ et $x_G \in G$. On note alors la somme $F \oplus G$.

Théorème – Caractérisation de la somme directe

Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

Théorème et définition – Base adaptée

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E en somme directe et si $\mathcal{B}_F = (x_1, \dots, x_p)$ et $\mathcal{B}_G = (y_1, \dots, y_q)$ sont des bases respectives de F et G , alors la concaténation

$$\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$$

de $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ est une base de $F \oplus G$. On dit que $\mathcal{B}$ est une base adaptée à la somme directe $F \oplus G$.

Définition – Sous-espaces supplémentaires

On dit que F et G sont *supplémentaires dans E* si $E = F \oplus G$.

Autrement dit, F et G sont supplémentaires dans E si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G .

⚠ Un supplémentaire n'est en général pas unique. Par exemple, n'importe quelle droite vectorielle différente de l'axe des ordonnées est un supplémentaire de l'axe des ordonnées.

Théorème – Caractérisation de la supplémentarité

Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires dans E si et seulement si $F + G = E$ et $F \cap G = \{0_E\}$.



Montrer que F et G sont supplémentaires

Pour montrer que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires dans E ,

- soit on montre que tout vecteur de E se décompose de manière unique comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G (par exemple par analyse-synthèse),
- soit on montre que
 - ◇ tout vecteur de E est la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ,
 - ◇ tout vecteur de $F \cap G$ est nul.

Théorème – Existence de supplémentaires en dimension finie

Si E est un espace vectoriel de dimension finie et F est un sous-espace vectoriel de E , alors F admet un supplémentaire G dans E , et on a

$$\dim F + \dim G = \dim E.$$

Remarques.

- Une conséquence immédiate est que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel quelconque E et si F et G sont en somme directe, alors

$$\dim F \oplus G = \dim F + \dim G.$$

- Les arguments de la preuve ci-dessus permettent d'obtenir que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont tels que la concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de E , alors F et G sont supplémentaires dans E . Nous avons déjà rencontré la réciproque.

Théorème - Formule de Grassmann

Soient E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie. Alors $F + G$ est de dimension finie, et

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G.$$

On déduit de ce résultat une manière souvent plus simple de montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires en dimension finie.

Théorème - Caractérisation de la supplémentarité

Si E est un espace vectoriel de dimension finie et F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , alors

$$F \oplus G = E \Leftrightarrow \begin{cases} F \cap G = \{0_E\}, \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E = F + G, \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases}$$

Remarque. On retiendra que pour montrer que F et G sont supplémentaires, il suffit de montrer *seulement deux* assertions parmi les trois suivantes :

$$E = F + G, \quad F \cap G = \{0_E\}, \quad \dim E = \dim F + \dim G.$$

On peut donc remplacer une des deux assertions $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$ par un argument de dimension.

Exemple. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

- On a $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) + \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- On a par ailleurs $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{0_{n,n}\}$: si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, alors $M = M^\top = -M$.

III Applications linéaires

1. Généralités

Définition - Application linéaire

- On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est *linéaire* (ou f est un morphisme de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels) si :

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

- Si $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une *forme linéaire* de E . On note parfois E^* l'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Remarque. Pour montrer qu'une application $f : E \rightarrow F$ est linéaire, il suffit de montrer que pour tous $x, y \in E$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.

Exemples.

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application λId_E est un endomorphisme de E , appelé *homothétie de E* de rapport λ .
- Si $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ est une base de E et $i \in I$, on note e_i^* l'application de E dans $\mathbb{K}$ qui à un vecteur de x associe sa coordonnée selon e_i dans la base $\mathcal{B}$:

$$e_i^* : \sum_{j \in I} x_j e_j \mapsto x_i.$$

Les applications e_i^* , pour $i \in I$, sont des formes linéaires, appelées formes coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$.

- Si $a \in \mathbb{K}$, l'application $P \mapsto P(a)$, appelée *évaluation en a* , définit une forme linéaire de $\mathbb{K}[X]$.
- Si $A \in \mathbb{K}[X]$, l'application $P \mapsto AP$ définit un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
- Si $Q \in \mathbb{K}[X]$, l'application $P \mapsto P \circ Q$ définit un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
- L'application $P \mapsto P'$ définit un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
- Si $a, b \in \mathbb{R}$, l'application $f \mapsto \int_a^b f(t) dt$ définit une forme linéaire de $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.
- Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors $f \mapsto f'$ définit une application linéaire de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. Elle définit par ailleurs un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.

Définition-théorème - Application linéaire associée à une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application

$$\begin{aligned}\varphi_A : \mathbb{K}^p &\rightarrow \mathbb{K}^n \\ X &\mapsto AX\end{aligned}$$

est une application linéaire, dite canoniquement associée à la matrice A . On la notera φ_A dans la suite.

Remarque. On rappelle l'identification que l'on fait entre $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, noté $\underline{\mathbb{K}}^n$ ici. Ceci permet de voir l'application du second exemple ci-dessus comme une application de $\underline{\mathbb{K}}^2$ dans $\underline{\mathbb{K}}^2$.

Définition - Isomorphisme, automorphisme, espaces vectoriels isomorphes

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective, on dit que f est un *isomorphisme* de E dans F . On dit alors que les espaces vectoriels E et F sont isomorphes.

On appelle *automorphisme* de E un isomorphisme de E dans E . On note $\text{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E .

Exemples.

- L'application $(a, b, c) \mapsto aX^2 + bX + c$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathbb{K}_2[X]$.
- Si $a, b \in \mathbb{K}$ et si on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, alors $u \mapsto (u_0, u_1)$ définit un isomorphisme de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{K}^2$.

Théorème - L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$

$\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. En particulier, toute combinaison linéaire d'applications linéaires de E dans F est une application linéaire.

Si E et F sont de dimension finie, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie, et $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \dim F$.

Remarque. En particulier, si E est de dimension finie, alors $\dim E^* = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = \dim E$.

Théorème - Réciproque, composition

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est un isomorphisme, alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

Si E, F, G sont trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

Si de plus f et g sont des isomorphismes, alors $g \circ f$ est un isomorphisme, et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Théorème - Anneau $\mathcal{L}(E)$

$(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$ est un anneau, dont le groupe des inversibles est $\text{GL}(E)$. Par conséquent, $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre.

Remarque. On a souvent recours à la notation multiplicative habituelle dans la manipulation des anneaux, ce qui nous amène à noter fg l'application $f \circ g$. De même, on note f^n l'application $f \circ \dots \circ f$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Les applications obtenues sont appelées les puissances de l'endomorphisme f .

Puissances d'un endomorphisme. Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}$, on note

$$f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}} \text{ si } n \in \mathbb{N}^*, \quad \text{et } f^0 = \text{Id}_E.$$

⚠ Attention à ne pas confondre cette opération avec le produit dans $\mathbb{K}$: si $x \in \mathbb{K}$, $f^n(x) \neq (f(x))^n$, et cette dernière expression n'a d'ailleurs pas de sens en général.

Remarque. $\mathcal{L}(E)$ ayant une structure d'anneaux, on sait que si $f, g \in \mathcal{L}(E)$ commutent (i.e. $fg = gf$), alors les formules du binôme de Newton et de Bernoulli s'appliquent : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(f + g)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k g^{n-k}, \quad \text{et} \quad f^n - g^n = \sum_{k=0}^{n-1} f^k g^{n-1-k}.$$

À nouveau, on prendra garde au fait que $f^k g^{n-k}$ désigne ici $f^k \circ g^{n-k}$.

2. Image et noyau d'une application linéaire

Définition - Noyau et image d'une application linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- On appelle *noyau* de f , noté $\text{Ker } f$, l'ensemble des antécédents de 0_F par f . Autrement dit,

$$\text{Ker } f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{u \in E, f(u) = 0_F\}.$$

- On appelle *image* de f , notée $\text{Im } f$, l'ensemble des images des éléments de E par f . Autrement dit,

$$\text{Im } f = f(E) = \{f(u), u \in E\} = \{v \in F, \exists u \in E, f(u) = v\}.$$

Remarque. Comme image réciproque d'un sous-espace vectoriel de F par une application linéaire, $\text{Ker } f$ est un sous-espace vectoriel de E . Comme image d'un sous-espace vectoriel de E , $\text{Im } f$ un sous-espace vectoriel de F .

Théorème - Image d'une application linéaire et famille génératrice

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(x_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E , alors $\text{Im } f = \text{Vect}(f(x_i))_{i \in I}$.

Exemple. Soit $\Psi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ définie par $\Psi : M \mapsto M - M^\top$.

- On a $\text{Ker } \Psi = \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.
- Comme $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\text{Im } \Psi = \text{Vect}(\Psi(E_{i,j}))_{1 \leq i, j \leq n} = \text{Vect}(E_{i,j} - E_{j,i})_{1 \leq i, j \leq n} = \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$$

car $(E_{i,j} - E_{j,i})_{1 \leq i, j \leq n}$ contient la base canonique de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Théorème - Caractérisation de l'injectivité ou de la surjectivité d'une application linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- f est injective si et seulement si $\text{Ker } f = \{0_E\}$.
- f est surjective si et seulement si $\text{Im } f = F$.

Remarques.

- Pour montrer que $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective, il suffit de montrer que $\text{Ker } f \subset \{0_E\}$, car on a toujours $\{0_E\} \subset \text{Ker } f$.
Pour montrer que $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est surjective, il suffit de montrer que $F \subset \text{Im } f$, car on a toujours $\text{Im } f \subset F$.
- Le critère de surjectivité est vrai pour toute application, il n'utilise pas la linéarité.

Théorème - Injectivité, surjectivité et image d'une base

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(e_i)_{i \in I}$ une base de E . Alors,

- f est surjective si et seulement si $(f(e_i))_{i \in I}$ est une famille génératrice de F ,
- f est injective si et seulement si $(f(e_i))_{i \in I}$ est une famille libre.

Ainsi, f est un isomorphisme de E dans F si et seulement si $(f(e_i))_{i \in I}$ est une base de F .

Définition - Noyau et image d'une matrice

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\varphi_A : X \mapsto AX$ l'application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$ qui lui est associée. On appelle :

- *noyau* de A , noté $\text{Ker } A$, le noyau de $\varphi_A : \text{Ker } A = \{X \in \mathbb{K}^n, AX = 0_n\}$,
- *image* de A , notée $\text{Im } A$, l'image de $\varphi_A : \text{Im } A = \{AX, X \in \mathbb{K}^n\}$.

Remarque. $\text{Ker } A$ n'est autre que l'ensemble des solutions du système linéaire homogène associé à A .

Théorème - Image d'une matrice et colonnes

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $C_1, \dots, C_p$ désignent les colonnes de A , alors $\text{Im } A = \text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$.

3. Rang d'une application linéaire**Définition - Rang d'une application linéaire**

On dit que $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est de *rang fini* si $\text{Im } f$ est de dimension finie. Dans ce cas, on appelle *rang* de f la dimension de $\text{Im } f$. On note alors $\text{rg } f = \dim \text{Im } f$.

Remarques.

- Si E est de dimension finie et a pour base $(e_1, \dots, e_n)$, alors $\text{rg } f = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.
- Si E et F sont de dimension finie, alors f est de rang fini et $\text{rg } f \leq \min(\dim E, \dim F)$.

Exemple. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X])$ définie par $f : P \mapsto XP'$. On a

$$\begin{aligned} \text{rg } f &= \text{rg}(f(X^n), f(X^{n-1}), \dots, f(X^2), f(X), f(1)) = \text{rg}(nX^n, (n-1)X^{n-1}, \dots, 2X^2, X, 0) \\ &= \text{rg}(nX^n, (n-1)X^{n-1}, \dots, 2X^2, X). \end{aligned}$$

Ainsi, $\text{rg } f = n$ car la famille $(nX^n, (n-1)X^{n-1}, \dots, 2X^2, X)$, échelonnée en degré, est libre.

Théorème - Rang et injectivité, surjectivité, bijectivité

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Si E est de dimension finie, f est injective si et seulement si $\text{rg } f = \dim E$.
- Si F est de dimension finie, f est surjective si et seulement si $\text{rg } f = \dim F$.

Si E et F sont de dimension finie et $\dim E = \dim F$, alors pour toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$,

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective} \Leftrightarrow f \text{ est un isomorphisme.}$$

Remarque. En particulier, si E est de dimension finie, un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est un automorphisme si et seulement si f est injectif ou surjectif.

Exemple. Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ distincts. L'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X], \mathbb{K}^{n+1})$ définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}_n[X] &\rightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P &\mapsto (P(a_0), \dots, P(a_n)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme. En effet, il est aisé de voir que $\text{Ker } f = \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$: si $f(P) = 0_{\mathbb{K}[X]}$, alors le polynôme P est de degré au plus n et a $a_0, \dots, a_n$ pour racines, soit $n+1$ racines distinctes, il est donc nul.

On retrouve un résultat connu : si $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $P(a_i) = y_i$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, il s'agit du polynôme obtenu par interpolation de Lagrange.

Théorème - Théorème du rang, forme géométrique

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que G est un supplémentaire de $\text{Ker } f$ dans E . Alors, $f_G : x \mapsto f(x)$ définit un isomorphisme de G dans $\text{Im } f$.

Démonstration. L'application f_G est linéaire car f l'est et est à valeurs dans $\text{Im } f$, donc $f_G \in \mathcal{L}(G, \text{Im } f)$.

- On a $\text{Ker } f_G = G \cap \text{Ker } f = \{0_E\}$ car G et $\text{Ker } f$ sont en somme directe, donc f_G est injective.
- Si $y \in \text{Im } f$, on considère $x \in E$ tel que $f(x) = y$, et on écrit $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in \text{Ker } f$ et $x_2 \in G$, on a alors $y = f(x) = f(x_2) = f_G(x_2)$. Ainsi, f_G est surjective. $\square$

Théorème - Théorème du rang

Si E est de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors

$$\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim \text{Ker } f + \text{rg } f.$$

Démonstration. On sait que $\text{Ker } f$ admet un supplémentaire G dans E qui est de dimension finie. D'après le théorème précédent, G et $\text{Im } f$ sont isomorphes. Ainsi, $\text{Im } f$ est de dimension finie, et $\dim \text{Im } f = \dim G$. Ceci conclut car comme $E = \text{Ker } f \oplus G$, on a $\dim G = \dim E - \dim \text{Ker } f$, donc $\text{rg } f = \dim \text{Im } f = \dim E - \dim \text{Ker } f$. $\square$

Remarque. On notera bien que rien n'est supposé sur l'espace d'arrivée, la formule ci-dessus est donc valable lorsque F est de dimension infinie.

4. Représentation matricielle

Définition - Matrice d'une application linéaire

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, de bases respectives $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_1), \dots, f(e_p))$. On la note $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_1), \dots, f(e_p)) = \begin{array}{c} \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{matrix} \end{array} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_p) \\ \left[\begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{array} \right] \end{array}.$$

$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_1))$
 $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_2))$
 $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_p))$

Remarques.

- On note parfois $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$, de sorte qu'on peut écrire $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(\mathcal{B}))$.
- *Cas d'un endomorphisme* : si $E = F$ et si la base $\mathcal{B}$ est choisie au départ et à l'arrivée, on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ au lieu de $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$.
- Si $n = \dim E$, on a toujours $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = I_n$.

Exemples.

1. Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ donnée par $f : (x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, x - z)$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. Comme on a

$$\begin{cases} f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, 1) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ f(e_2) = f(0, 1, 0) = (2, 0) = 2\varepsilon_1, \\ f(e_3) = f(0, 0, 1) = (1, -1) = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \end{cases}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}}(f(e_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}}(f(e_2)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{et } \text{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}}(f(e_3)) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ et}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si on change la base d'arrivée en $\mathcal{C}' = (\varepsilon'_1, \varepsilon'_2)$, où $\varepsilon'_1 = (1, 1)$ et $\varepsilon'_2 = (-1, 1)$, alors $f(e_1) = (1, 1) = \varepsilon'_1$, $f(e_2) = (2, 0) = \varepsilon'_1 - \varepsilon'_2$, et $f(e_3) = (1, -1) = -\varepsilon'_2$, donc :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ définie par $f : P \mapsto XP' + P(1)$, et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{matrix} & \begin{matrix} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}, \text{ car } \begin{cases} f(1) = 1, \\ f(x) = 1 + X, \\ f(X^2) = 1 + 2X^2. \end{cases}$$

Remarque. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ sont les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$ alors l'application linéaire φ_A canoniquement associée à A a pour matrice A relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\varphi_A) = A.$$

Théorème - Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ des bases respectives de E et F . Pour tout $x \in E$, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x).$$

Exemple. On reprend l'exemple ci-dessus : $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ est définie par $f : P \mapsto XP' + P(1)$. À l'aide de la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ calculée ci-dessus, on peut calculer l'image par f du polynôme $P = 1 - X + 2X^2$:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(P)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

On trouve alors bien que $f(P) = 2 - X + 4X^2$.

Remarques.

- On peut aisément généraliser ce résultat à une famille de vecteurs $(x_1, \dots, x_p)$ de E :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(x_1), \dots, f(x_p)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p).$$

- Le résultat ci-dessus permet de faire des calculs de noyaux et d'image d'une application linéaire f en calculant le noyau et l'image d'une matrice de f : en effet, si $x \in E$ et $y \in F$, alors en notant $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(y)$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$,

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker } f &\Leftrightarrow f(x) = 0_F \Leftrightarrow AX = 0_{n,1} \Leftrightarrow X \in \text{Ker } A \\ y \in \text{Im } f &\Leftrightarrow \exists x \in E, y = f(x) \Leftrightarrow \exists X \in \mathbb{K}^p, Y = AX. \end{aligned}$$

Exemple. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ donnée par

$$f : P \mapsto 2P - (X + 1)P'.$$

Comme $f(1) = 2$, $f(X) = X - 1$, et $f(X^2) = -2X$, la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ est

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

– Déterminons $\text{Ker } f$: si $P = a + bX + cX^2$, on a $P \in \text{Ker } f$ si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = 0_{3,1}$, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = 0 \\ b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ c = a \end{cases}.$$

Ainsi, $P \in \text{Ker } f$ si et seulement si P s'écrit $a + 2aX + aX^2$, ce qui donne $\text{Ker } f = \text{Vect}(X^2 + 2X + 1)$.

– Déterminons $\text{Im } f$: si $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on a $Q \in \text{Im } f$ si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(Q) \in \text{Im } A$. Or

$$\text{Im } A = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

On en déduit que $\text{Im } f = \text{Vect}(1, X)$.

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(1)$ $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(X)$

Le résultat suivant justifie la correspondance entre les applications linéaires entre deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et les matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Théorème - Applications linéaires et matrices

Si E, F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, alors l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{L}(E, F) &\rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f &\mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \end{aligned}$$

où $p = \dim E$ et $n = \dim F$, est un isomorphisme de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

Théorème - Représentation matricielles et opérations

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E . Si $f, g \in \mathcal{L}(E)$, alors

- $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$,
- f est inversible si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^{-1}$.

Remarque. Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n , l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(E) &\mapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ f &\mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \end{aligned}$$

est donc un isomorphisme d'anneaux. En particulier, si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$, alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^k) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^k$.

5. Rang d'une matrice

Définition - Rang d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle *rang* de A , noté $\text{rg}(A)$, la dimension de $\text{Im } A$, c'est-à-dire le rang de la famille formée par ses vecteurs colonnes :

$$\text{rg } A = \dim \text{Im } A = \dim \text{Vect}(C_1, \dots, C_p),$$

où $C_1, \dots, C_p$ sont les colonnes de A . Autrement dit $\text{rg } A = \text{rg } \varphi_A$, où φ_A est l'application linéaire canoniquement associée à A .

Remarque. Comme $\text{rg } A = \text{rg } \varphi_A$, on sait que $\text{rg } A \leq \min(p, n)$. En d'autres termes, le rang d'une matrice ne peut excéder le nombre de ses lignes, ni le nombre de ses colonnes.

Théorème – Rang d’une application linéaire, rang d’une matrice

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors

$$\text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)) = \text{rg } f.$$

On retiendra que le rang de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est le rang de sa matrice relativement à n’importe quel couple de bases. Par conséquent, le calcul du rang d’une application linéaire ou d’une famille de vecteur peut se ramener au calcul du rang d’une matrice.

Exemple. Si $P = X^2 - X + 1$, $Q = 3X^2 + X + 2$ et $R = 3X^2 + 5X + 1$, alors $\text{rg}(P, Q, R) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Remarque. Le théorème du rang entraîne que si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $p = \dim \ker A + \text{rg } A$.

6. Changement de base, équivalence, similitude

On désigne par E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ sont deux bases de E .

Définition – Matrice de passage

On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}').$$

Il s’agit de la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{matrix} & e'_1 & \dots & e'_n \\ \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Théorème – Propriétés des matrices de passage

Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont trois bases de E , alors

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \text{ est inversible, et } (P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}, \quad P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}.$$

Exemple. On se place dans $\mathbb{R}^2$, muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et de la base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ avec $e'_1 = (1, 1)$ et $e'_2 = (0, 1)$. On a

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{matrix} & e'_1 & e'_2 \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \text{et} \quad P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = \begin{matrix} & e_1 & e_2 \\ \begin{matrix} e'_1 \\ e'_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Théorème – Vecteurs et changement de base

Si $x \in E$ et si on note $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$, on a : $X = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} X'$.

Exemple. Revenons à l’exemple ci-dessus : si $x = (2, 2)$, alors on a $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. On trouve les coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ en écrivant :

$$X' = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Théorème – Applications linéaires et changement de base

Soient E, F des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E , $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux bases de F . Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors en notant : $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$, $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(f)$, $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$, $Q = P_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}$, on a :

$$A' = Q^{-1} A P.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que $\text{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(\text{Id}_F) \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(\text{Id}_F \circ f \circ \text{Id}_E)$. $\square$

Théorème - Matrices J_r

Soient E, F des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie avec $\dim E = p$ et $\dim F = n$. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\text{rg } f = r$, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E et une base $\mathcal{C}$ de F telles que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = J_r, \quad \text{où } J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Démonstration. On remarque pour commencer que le théorème du rang entraîne que $\dim \text{Ker } f = p - r$.

On considère une base de $\text{Ker } f$, qu'on note $(e_{r+1}, \dots, e_p)$. On peut ensuite compléter cette famille en une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_p)$ de E .

La famille $(f(e_1), \dots, f(e_r))$ est libre : en effet si $\lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_r f(e_r) = 0_F$, alors par linéarité $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r \in \text{Ker } f \cap \text{Vect}(e_1, \dots, e_r) = \{0_E\}$, donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$. On peut donc compléter cette famille libre de F en une base $\mathcal{C} = (f(e_1), \dots, f(e_r), \varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_n)$ de F .

$$\begin{array}{c} f(e_1) \quad \dots \quad f(e_r) \quad f(e_{r+1}) \quad \dots \quad f(e_p) \\ \begin{array}{c} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_r) \\ \varepsilon_{r+1} \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{array} \begin{bmatrix} 1 & & & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est donc bien la matrice J_r souhaitée. $\square$

Remarques. Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

- Il y a une matrice J_r pour chaque taille $n \times p$ de matrice. Lorsqu'on aura besoin de le préciser, on notera $J_r^{n,p}$ la matrice J_r de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- La matrice J_r est de rang r .

Définition - Matrices équivalentes

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont équivalentes s'il existe deux matrices inversibles $P \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$B = Q^{-1}AP.$$

Remarques.

- Si $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est obtenue depuis $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par opérations élémentaires, alors A et B sont équivalentes.
- Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles représentent la même application linéaire dans deux couples de bases.

Théorème - Équivalence et rang

Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

Théorème - Rang et transposition

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $\text{rg } A = \text{rg } A^\top$.

Remarque. On avait déjà vu que le rang d'une matrice est le rang de la famille de ses colonnes, on déduit de ce qui précède que c'est aussi le rang de la famille de ses lignes.



Calcul du rang

Les opérations élémentaires permettent au moyen de l'algorithme du pivot de Gauss de se ramener sans changer le rang à une matrice échelonnée, dont le rang est égal au nombre de ses lignes non nulles.

Exemple. $\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 15 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$

Définition - Matrices semblables

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est semblable à B s'il existe une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

Remarques.

- La relation de similitude est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Deux matrices semblables sont en particulier équivalentes, elles ont donc même rang.

Théorème - Similitudes et applications linéaires

Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme, chacune dans une base donnée.

Remarque. On prendra garde au fait que la base d'arrivée de l'endomorphisme doit être *la même au départ et à l'arrivée* : deux matrices A et B sont semblables si et seulement s'il existe un espace vectoriel E qui a pour bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f), \quad \text{et} \quad B = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f).$$

Théorème - Similitude et rang, trace, déterminant.

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, alors

$$\text{rg } A = \text{rg } B, \quad \text{tr } A = \text{tr } B, \quad \det A = \det B.$$

Rappel. On rappelle que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Démonstration. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, alors elles sont équivalentes, donc ont même rang. Par ailleurs, si on $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ est telle que $B = P^{-1}AP$. On en déduit que $\text{tr } B = \text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(APP^{-1}) = \text{tr } A$, et $\det(B) = \det(P^{-1}) \det A \det P = (\det P)^{-1} \det A \det P = \det A$. $\square$

Définition - Trace et déterminant d'un endomorphisme

Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie ayant pour base $\mathcal{B}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$, on appelle alors :

- trace de f le scalaire $\text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$, qu'on note $\text{tr}(f)$,
- déterminant de f le scalaire $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$, qu'on note $\det(f)$.

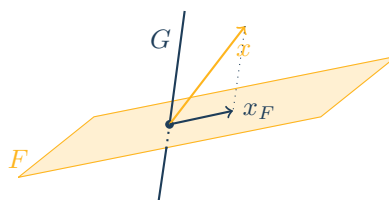
Remarque. D'après ce qui précède $\text{tr}(f)$ et $\det(f)$ ne dépendent pas du choix de la base $\mathcal{B}$ de E .

7. Projecteurs, symétries

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E : tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = x_F + x_G, \quad \text{où } x_F \in F, \quad x_G \in G.$$

Dans toute la suite, nous utiliserons les notations ci-dessus.



Définition-théorème - Projecteur

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E , on appelle *projecteur sur F parallèlement à G* l'application

$$\begin{aligned} p : E &\rightarrow E \\ x &\mapsto x_F \end{aligned}$$

Ainsi définie, l'application p est un endomorphisme de E .

L'application $q : x \mapsto x_G$ définit alors un autre projecteur, et on dit que p et q sont des projecteurs associés.

Exemple. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on rappelle que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. Plus précisément, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $M = \frac{1}{2}(M + M^\top) + \frac{1}{2}(M - M^\top)$, avec $\frac{1}{2}(M + M^\top) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\frac{1}{2}(M - M^\top) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. Par conséquent, le projecteur sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est :

$$p : M \mapsto \frac{1}{2}(M + M^\top).$$

Remarques.

- Si $E = F \oplus G$ et p est le projecteur sur F parallèlement à G , alors $\begin{cases} p(x) = x & \text{pour tout } x \in F, \\ p(x) = 0_E & \text{pour tout } x \in G. \end{cases}$
- Si de plus q est le projecteur sur G parallèlement à F , alors :

$$p + q = \text{Id}_E, \quad \text{et} \quad pq = qp = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Théorème - Caractérisation des projecteurs

Si $p \in \mathcal{L}(E)$, alors p est un projecteur de E si et seulement si $p \circ p = p$, et dans ce cas :

- p est un projecteur sur $\text{Im } p$, parallèlement à $\text{Ker } p$.
- $\text{Im } p = \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$.

En particulier, $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$.

Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p = \text{Ker}(p - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker } p$, la matrice d'un projecteur p s'écrit :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_r \\ e_{r+1} \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} p(e_1) & \dots & p(e_r) & p(e_{r+1}) & \dots & p(e_n) \\ \hline 1 & & & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right].$$

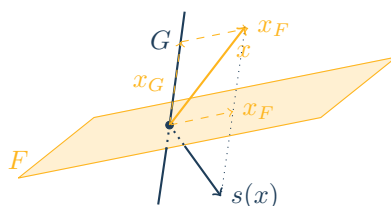
où $r = \dim(\text{Im } p) = \text{rg } p$. Ainsi, on a $\text{tr}(p) = r = \text{rg}(p)$.

Définition-théorème - Symétrie

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E , on appelle *symétrie par rapport à F parallèlement à G* l'application

$$\begin{aligned} s : E &\rightarrow E \\ x &\mapsto x_F - x_G \end{aligned}$$

Ainsi, définie, l'application s est un endomorphisme de E .



Théorème - Caractérisation des symétries

Si $s \in \mathcal{L}(E)$, alors s est une symétrie de E si et seulement si $s \circ s = \text{Id}_E$, et dans ce cas :

- (i) s est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - \text{Id}_E)$, parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{Id}_E)$,
- (ii) on a $F = \text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ et $G = \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$.

En particulier, $E = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$.

Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la $E = E = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$, la matrice d'une symétrie s s'écrit :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_r \\ e_{r+1} \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} p(e_1) & \dots & p(e_r) & p(e_{r+1}) & \dots & p(e_n) \\ \hline 1 & & & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & -1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & & & -1 \end{array} \right].$$

Remarque. Si $E = F \oplus G$ et p est le projecteur sur F , parallèlement à G , et s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G , alors $s = 2p - \text{Id}_E$.

IV Formes linéaires et hyperplans

Définition - Hyperplan

Si H est un sous-espace vectoriel de E , on dit que H est un *hyperplan* de E si H est le noyau d'une forme linéaire non nulle de E .

Exemples.

- Comme $\varphi : (x, y, z) \mapsto 3x + 2y - z$ est une forme linéaire non nulle de $\mathbb{R}^3$, $\text{Ker } \varphi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 3x + 2y - z = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.
- Comme $\psi : P \mapsto P(2)$ est une forme linéaire non nulle de $\mathbb{R}_n[X]$, $\text{Ker } \psi = \{P \in \mathbb{R}_n[x], P(2) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[x]$.
- L'hyperplan $\{f \in \mathcal{C}_0([0, 1], \mathbb{R}), \int_0^1 f(t) dt = 0\}$ est associé à la forme linéaire $f \mapsto \int_0^1 f(t) dt$ de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.

Théorème - Caractérisation des hyperplans

Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan de E si et seulement s'il existe un sous-espace vectoriel D de E tel que $\dim D = 1$ et $E = H \oplus D$.

Remarque. Si E est un espace vectoriel de dimension finie n , alors un sous-espace vectoriel H de E est donc un hyperplan de E si et seulement si $\dim H = n - 1$.

Théorème - Equations d'un hyperplan

Si φ et ψ sont deux formes linéaires non nulles sur E telles que $H = \text{Ker } \varphi = \text{Ker } \psi$, alors φ et ψ sont colinéaires.

Théorème - Intersection d'hyperplans

Si E est de dimension finie n ,

- si $H_1, \dots, H_m$ sont des hyperplans de E , alors $\dim(H_1 \cap \dots \cap H_m) \geq n - m$,

- si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - m$, il existe des hyperplans $H_1, \dots, H_m$ de E tels que $F = H_1 \cap \dots \cap H_m$.