

Chapitre 1

Algèbre linéaire – Compléments

Ce chapitre est consacré à des compléments d'algèbre linéaire

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Somme directe d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Nous avons déjà défini la somme de deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, nous allons définir la somme d'un nombre fini d'entre eux. La définition est tout à fait analogue, et les propriétés de la somme également.

Définition-théorème - Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E . On définit la somme de $F_1, \dots, F_n$ par

$$\sum_{i=1}^n F_i = F_1 + \dots + F_n = \{x_1 + \dots + x_n, x_1 \in F_1, \dots, x_n \in F_n\}.$$

Ainsi défini, $F_1 + \dots + F_n$ est un sous-espace vectoriel de E . Il s'agit du plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient tous les F_i :

$$F_1 + \dots + F_n = \text{Vect}(F_1 \cup \dots \cup F_n).$$

Remarque. Ainsi, si G est un sous-espace vectoriel de E qui contient tous les F_i , alors $F_1 + \dots + F_n \subset G$.

Démonstration.

- Si $x \in F_1 + \dots + F_n$, il existe $x_1 \in F_1, \dots, x_n \in F_n$ tels que $x = x_1 + \dots + x_n$. Ainsi, comme combinaison linéaire de vecteurs de $F_1 \cup \dots \cup F_n$, on a $x \in \text{Vect}(F_1 \cup \dots \cup F_n)$.
- Si $x \in \text{Vect}(F_1 \cup \dots \cup F_n)$, alors il existe $y_1, \dots, y_k \in F_1 \cup \dots \cup F_n$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ tels que $x = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_k y_k$.

En regroupant les vecteurs dans la somme selon leur appartenance aux F_i , qui sont stables par combinaison linéaire, on peut écrire x sous la forme $x = x_1 + \dots + x_n$, où $x_1 \in F_1, \dots, x_n \in F_n$.

On a donc bien montré $F_1 + \dots + F_n = \text{Vect}(F_1 \cup \dots \cup F_n)$, ce qui justifie que $F_1 + \dots + F_n$ est un sous-espace vectoriel. Par ailleurs, par définition du sous-espace vectoriel engendré, si G est un sous-espace vectoriel qui contient $F_1 \cup \dots \cup F_n$, alors $G \supset \text{Vect}(F_1 \cup \dots \cup F_n)$. $\square$

Définition - Somme directe d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

On dit que les sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_n$ de E sont en *somme directe* si tout vecteur $x \in F_1 + \dots + F_n$ s'écrit *de manière unique* sous la forme

$$x = x_1 + \dots + x_n, \quad \text{où } x_1 \in F_1, \dots, x_n \in F_n.$$

Dans ce cas, la somme $F_1 + \dots + F_n$ est notée $F_1 \oplus \dots \oplus F_n$, ou encore $\bigoplus_{i=1}^n F_i$.

! Il ne suffit pas que les sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_n$ soient deux à deux en somme directe pour affirmer que la somme $F_1 + \dots + F_n$ est directe.

Exemple. On se place dans $\mathbb{R}^2$, et on note $x_1 = (0, 1)$, $x_2 = (1, 0)$ et $x_3 = (1, 1)$, puis $F_i = \text{Vect}(x_i)$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$. Les F_i sont clairement deux à deux en somme directe, mais $(1, 1) = x_3 = x_1 + x_2$, donc la somme $F_1 + F_2 + F_3$ n'est pas directe.

Théorème - Caractérisation de la somme directe d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E . La somme $F_1 \oplus \dots \oplus F_n$ est directe

si et seulement si

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n, \quad x_1 + \dots + x_n = 0_E \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = 0_E. \quad (1)$$

Démonstration.

- $\Leftarrow$ Si la somme est directe, l'unicité de l'écriture de 0_E dans la somme $F_1 \oplus \dots \oplus F_n$ conclut.
 $\Rightarrow$ Si (1) est vérifiée, on considère $x \in F_1 + \dots + F_n$ et on suppose que $x = x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_n$, où $x_i, y_i \in F_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors $\underbrace{(x_1 - y_1)}_{\in F_1} + \dots + \underbrace{(x_n - y_n)}_{\in F_n} = 0_E$, donc par (1), $x_i - y_i = 0_E$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, ce qui donne l'unicité. $\square$

Remarque. On montre par ailleurs aisément que $F_1 + \dots + F_n$ est directe si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, la somme de F_i et $F_1 + \dots + F_{i-1}$ est directe.

Théorème - Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E . Alors $F_1 + \dots + F_n$ est de dimension finie, et

$$\dim(F_1 + \dots + F_n) \leq \dim F_1 + \dots + \dim F_n,$$

et $\dim(F_1 + \dots + F_n) = \dim F_1 + \dots + \dim F_n$ si et seulement si la somme est directe.

Démonstration. On considère l'application linéaire $\varphi : F_1 \times \dots \times F_n \rightarrow F_1 + \dots + F_n$ définie par

$$\varphi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \dots + x_n$$

Par définition de $F_1 + \dots + F_n$, l'application φ est surjective. Ainsi,

$$\dim(F_1 + \dots + F_n) = \text{rg } \varphi \leq \dim(F_1 \times \dots \times F_n) = \dim F_1 + \dots + \dim F_n.$$

On remarque que la somme est directe si et seulement si φ est injective. Ainsi, la somme est directe si et seulement si $\text{rg } \varphi = \dim(F_1 \times \dots \times F_n) = \dim F_1 + \dots + \dim F_n$, c'est-à-dire : $\dim(F_1 + \dots + F_n) = \dim F_1 + \dots + \dim F_n$. $\square$

On déduit alors le résultat suivant, qui généralise la notion de base adaptée vue en MPSI pour deux sous-espaces vectoriels.

Théorème - Base adaptée

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E , de bases respectives $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$. Alors, on a l'équivalence :

$$E = F_1 \oplus \dots \oplus F_n \Leftrightarrow \text{la concaténation de } \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n \text{ est une base de } E$$

Remarque. Ainsi, si une base de E est la concaténation de familles $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$, alors en notant $F_i = \text{Vect}(\mathcal{B}_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_n$.

Théorème - Projecteurs associés à une décomposition de E en somme directe

Soient E un espace vectoriel et $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels tels que $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_n$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'application $p_i : E \rightarrow E$ donnée par

$$p_i : x \mapsto x_i, \quad \text{où } x = \underbrace{x_1}_{\in F_1} + \dots + \underbrace{x_n}_{\in F_n}$$

est un projecteur. Il s'agit du projecteur sur F_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} F_j$.

On a alors $p_1 + \dots + p_n = \text{Id}_E$, et si $i \neq j$, alors $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Démonstration. Comme $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_n$, les sous-espaces vectoriels F_i et $G_i = \bigoplus_{j \neq i} F_j$ sont supplémentaires dans E , et la projection sur F_i parallèlement à G_i est exactement p_i .

Par ailleurs, pour tout $x \in E$, on a, avec les notations de l'énoncé, $x = x_1 + \dots + x_n = p_1(x) + \dots + p_n(x)$, donc $p_1 + \dots + p_n = \text{Id}_E$.

Pour finir, si $i \neq j$ et $x \in E$, alors $p_i \circ p_j(x) = p_i(x_j) = 0_E$ car $x_j \in G_i$. $\square$

Théorème - Caractérisation d'une application linéaire par ses restrictions si $E = \bigoplus_i E_i$

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$.

Si $f_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f|_{E_i} = f_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Démonstration. La démonstration par analyse synthèse faite en MPSI s'adapte immédiatement. $\square$

II Matrices définies par blocs

1. Opérations par blocs

Définition - Matrice définie par blocs

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ est définie par blocs si elle est de la forme

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,p} \\ \hline \vdots & & & \vdots \\ \hline A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,p} \end{array} \right]$$

où les $A_{i,j}$ sont des matrices telles que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $A_{i,1}, \dots, A_{i,p}$ ont même nombre de lignes, et pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $A_{1,j}, \dots, A_{n,j}$ ont même nombre de colonnes.

Remarque. Toute matrice peut être définie par blocs en regroupant certaines lignes ou colonnes consécutives.

Le résultat suivant assure que le produit de matrices par blocs se fait comme le produit matriciel habituel, à condition que les blocs aient des tailles qui se correspondent. La preuve est facile mais technique, et n'est pas exigible.

Théorème - Produit de matrices par blocs

Soient A, B deux matrices définies par blocs :

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} A_{1,1} & \dots & A_{1,p} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline A_{n,1} & \dots & A_{n,p} \end{array} \right], \quad B = \left[\begin{array}{c|c|c} B_{1,1} & \dots & B_{1,q} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline B_{p,1} & \dots & B_{p,q} \end{array} \right]$$

telles que pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, le nombre de colonnes des matrices $A_{1,k}, \dots, A_{n,k}$ est égal au nombre de lignes des matrices $B_{k,1}, \dots, B_{k,q}$. Alors la matrice AB peut être écrite par blocs $C_{i,j}$ donnés par

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, \quad C_{i,j} = \sum_{k=1}^p A_{i,k} B_{k,j}.$$

Démonstration. La preuve du résultat consiste en un regroupement par paquets des sommes qui définissent les coefficients du produit matriciel de A et B , selon le découpage en blocs. Nous ne la détaillons pas ici. $\square$

Exemple. Si A et B sont deux matrices carrées décrites par blocs $A_{i,j}, B_{i,j}$ où $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ sont telles que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $A_{i,i} B_{i,i}$ sont carrées de même taille, alors le produit de A et B existe et peut s'écrire par blocs.

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} AA' + BC' & AB' + BD' \\ \hline CA' + DC' & CB' + DC' \end{array} \right]$$

Remarques.

- Le plus souvent, les calculs de produits par blocs concerneront des matrices carrées dites diagonales par blocs, dont les blocs diagonaux sont carrés :

$$\begin{bmatrix} \boxed{A_{1,1}} & & & \\ & \boxed{A_{2,2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_{n,n}} \end{bmatrix}$$

On note souvent $\text{diag}(A_{1,1}, \dots, A_{n,n})$ les matrices diagonales par blocs comme ci-dessus.

- L'addition de matrices par blocs ne pose pas de problème à condition que les deux matrices aient des blocs de même taille deux à deux. La multiplication par un scalaire ne pose pas de problème.
- Transposer une matrice par blocs revient à transposer l'organisation des blocs, ainsi que les blocs :

$$\text{Si } A = \left[\begin{array}{c|c|c} A_{1,1} & \dots & A_{1,p} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline A_{n,1} & \dots & A_{n,p} \end{array} \right], \text{ alors } A^\top = \left[\begin{array}{c|c|c} A_{1,1}^\top & \dots & A_{n,1}^\top \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline A_{1,p}^\top & \dots & A_{n,p}^\top \end{array} \right].$$

- Si A est une matrice carrée définie par blocs, on peut exprimer les puissances de A s'il y a autant de lignes de blocs que de colonnes, et si les blocs diagonaux sont carrés.

Exemple. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $U = \left[\begin{array}{c|c} \lambda I_n & A \\ \hline B & I_n \end{array} \right]$ et $V = \left[\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline -B & \lambda I_n \end{array} \right]$, alors :

$$UV = \left[\begin{array}{c|c} \lambda I_n - AB & \lambda A \\ \hline 0 & \lambda I_n \end{array} \right], \quad \text{et} \quad VU = \left[\begin{array}{c|c} \lambda I_n & A \\ \hline 0 & -BA + \lambda I_n \end{array} \right].$$

Théorème - Puissances de matrices triangulaires ou diagonales par blocs

Soit A une matrice définie par blocs $A_{i,j}$ avec $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ telle que $A_{i,i}$ est carrée pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- Si A est triangulaire supérieure par blocs (c'est-à-dire : $i > j \Rightarrow A_{i,j} = 0$), alors

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & \dots & \dots & A_{1,n} \\ \hline & \ddots & & \vdots \\ \hline & & \ddots & \vdots \\ \hline & & & A_{n,n} \end{array} \right] \quad \text{et pour tout } k \in \mathbb{N}, \quad A^k = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1}^k & \star & \dots & \star \\ \hline & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline & & \ddots & \star \\ \hline & & & A_{n,n}^k \end{array} \right].$$

- Si A est diagonale par blocs (c'est-à-dire : $i \neq j \Rightarrow A_{i,j} = 0$), alors

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & & & \\ \hline & \ddots & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & A_{n,n} \end{array} \right] \quad \text{et pour tout } k \in \mathbb{N}, \quad A^k = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1}^k & & & \\ \hline & \ddots & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & A_{n,n}^k \end{array} \right].$$

Démonstration. La preuve est analogue à la preuve du résultat sur les puissances de matrices triangulaires ou diagonales. $\square$

Remarque. Plus généralement, si A et B sont écrites par blocs comme ci-dessus, de blocs diagonaux carrés et de même taille deux à deux,

- si A et B sont triangulaires par blocs, alors AB est aussi triangulaire par blocs, de blocs diagonaux les $A_{i,i}B_{i,i}$,
- si A et B sont diagonales par blocs, alors AB est aussi triangulaire par blocs, de blocs diagonaux les $A_{i,i}B_{i,i}$, on écrit :

$$\text{diag}(A_{1,1}, \dots, A_{n,n}) \text{diag}(B_{1,1}, \dots, B_{n,n}) = \text{diag}(A_{1,1}B_{1,1}, \dots, A_{n,n}B_{n,n}).$$

2. Déterminants de matrices définies par blocs

Définition-théorème - Transvection par blocs

Soit A une matrice définie par blocs $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i,p_j}(\mathbb{K})$. Si $M \in \mathcal{M}_{n_i,n_j}(\mathbb{K})$, on pose

$$T_{i,j}(M) = \begin{bmatrix} I_{n_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & I_{n_i} & \\ & & & \ddots \\ & & & & I_{n_j} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & I_{n_N} \end{bmatrix}$$

Alors la matrice $T_{i,j}(M)A$ est la matrice obtenue à partir de A en effectuant l'opération $L_i \leftarrow L_i + ML_j$, c'est-à-dire que les blocs $A_{i,k}$ de la ligne i sont remplacés par $A_{i,k} + MA_{j,k}$.

Démonstration. Le résultat découle directement du produit par blocs des matrices détaillé plus haut. □

Corollaire - Invariance du déterminant et du rang par transvection par blocs

Soient A une matrice définie par blocs $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i,p_j}(\mathbb{K})$ et $M \in \mathcal{M}_{n_i,n_j}(\mathbb{K})$.

- La transvection par blocs $L_i \leftarrow L_i + ML_j$ ne change pas le rang de A .
- Si A est carrée, la transvection par blocs $L_i \leftarrow L_i + ML_j$ ne change pas le déterminant de A .

Démonstration. Il suffit de remarquer que $T_{i,j}(M)$ est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous égaux à 1, donc $\det(T_{i,j}(M)) = 1$, et $T_{i,j}(M)$ est inversible.

Par conséquent, $\text{rg}(T_{i,j}(M)A) = \text{rg } A$, et $\det(T_{i,j}(M)A) = \det(T_{i,j}(M)) \det A = \det A$. □

Théorème - Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Si A une matrice triangulaire par blocs :

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & \star & \dots & \star \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ & & & A_{n,n} \end{bmatrix}$$

dont les blocs diagonaux $A_{1,1}, \dots, A_{n,n}$ sont carrés, alors $\det A = \det(A_{1,1}) \dots \det(A_{n,n})$.

Démonstration. Montrons le résultat pour $n = 2$. Le cas général s'en déduit de manière immédiate par récurrence sur n . On remarque que

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline 0 & A_{2,2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} I & A_{1,2} \\ \hline 0 & A_{2,2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} A_{1,1} & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right],$$

où I désigne à chaque fois la matrice identité de taille adaptée. Or en développant successivement par rapport aux premières colonnes pour la première matrice, et par rapport aux dernières colonnes pour la seconde, on obtient

$$\det \left[\begin{array}{c|c} I & A_{1,2} \\ \hline 0 & A_{2,2} \end{array} \right] = \det A_{2,2}, \quad \text{et} \quad \det \left[\begin{array}{c|c} A_{1,1} & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] = \det A_{1,1}.$$

On a donc bien $\det A = \det(A_{1,1}) \det(A_{2,2})$. □

Remarque. En particulier, si A est diagonale par blocs de blocs diagonaux carrés $A_1, \dots, A_n$, alors son déterminant est le produit des déterminants diagonaux : $\det A = \det(A_1) \dots \det(A_n)$.

En général, on a $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \neq \det(A) \det(D) - \det(B) \det(C)$, même si les blocs sont carrés.

3. Sous-espaces stables, endomorphisme induit

Définition – Sous-espace stable

Soient E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par u si $u(F) \subset F$. Autrement dit, pour tout $x \in F$, $u(x) \in F$.

Remarques. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- Si $F = \text{Vect}(x_i)_{i \in I}$, alors F est stable par u si et seulement si $u(x_i) \in F$ pour tout $i \in I$.
- Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E stables par u , alors $F + G$ et $F \cap G$ sont stables par u .

Théorème

Si E est un espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ sont tels que $u \circ v = v \circ u$, alors $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont stables par v .

Démonstration.

- Si $x \in \text{Ker } u$, alors $u(v(x)) = v(u(x)) = v(0_E) = 0_E$, donc $v(x) \in \text{Ker } u$. On a donc bien $v(\text{Ker } u) \subset \text{Ker } u$.
- Si $y \in \text{Im } u$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Ainsi, $v(y) = v(u(x)) = u(v(x)) \in \text{Im } u$, et on a $v(\text{Im } u) \subset \text{Im } u$. $\square$

Définition – Endomorphisme induit

Soient E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u , on appelle *endomorphisme induit* par u sur F l'application $u_F : F \rightarrow F$ définie par

$$u_F : x \mapsto u(x)$$

- ⚠
- Il est crucial que F soit stable par u pour pouvoir définir l'endomorphisme induit $u_F : F \rightarrow F$.
 - Il ne faut pas confondre u_F avec la *restriction* de u à F , qu'on peut toujours définir, et qui est une application linéaire de F dans E .

Théorème – Sous-espace vectoriel stable et représentation matricielle

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si F est un sous-espace vectoriel stable par u , alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit de la forme

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right]$$

où A et C sont des matrices carrées.

Démonstration. On considère une base $\mathcal{B}_F$ de F et une base $\mathcal{B}$ de E qui complète $\mathcal{B}_F$. Pour tout vecteur x de $\mathcal{B}_F$, on a $u(x) \in F$, donc la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme ci-dessus. $\square$

Remarques.

- Dans le cas de la preuve ci-dessus, la matrice A est la matrice de l'endomorphisme induit u_F dans la base $\mathcal{B}_F$.
 - Réciproquement, si u a une matrice de la forme ci-dessus dans une base donnée, on en déduit l'existence d'un sous-espace stable par u .
 - Plus généralement, si $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$ et $E_1, \dots, E_n$ sont stables par u , alors la matrice de u dans une base adaptée à $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$ est diagonale par blocs, avec des blocs diagonaux carrés.
- Plus précisément, si $\mathcal{B}$ est la concaténation de bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ respectives de $E_1, \dots, E_n$, alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_n} \end{bmatrix}, \quad \text{où } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_i = \text{Mat}_{\mathcal{B}_i}(u_{E_i}).$$