

28 septembre – 2 octobre

Séries – Familles sommables

Séries numériques

- Révisions MPSI. Convergence, divergence, absolue convergence. Propriétés des séries. Théorèmes de comparaisons pour les séries à termes positifs. Critère spécial des séries alternées.
- Comparaison série intégrale, application à la recherche d'équivalent.
- Règle de d'Alembert.
- Sommation des relations de comparaison. Application à la recherche de développements asymptotiques. Lemme de Cesàro.
- Développement asymptotique

Ensembles dénombrables

- Équipotence. Ensembles dénombrables, ensembles au plus dénombrables.
- Un ensemble E est au plus dénombrable si et seulement s'il existe une injection de E dans $\mathbb{N}$, ou une surjection de $\mathbb{N}$ dans E .
- Une union dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est dénombrable. Un produit fini d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.
- Les ensembles $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (argument diagonal de Cantor).

Familles sommables

- Sommation d'une famille de $\overline{\mathbb{R}}_+$.
- Sommation par paquets (cas positif, cas sommable).
- Théorèmes de Fubini-Tonelli (cas positif), de Fubini (cas général).
- Linéarité de la somme (cas positif, cas sommable).
- Le support d'une famille sommable est au plus dénombrable.

Espaces vectoriels normés

- Norme sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$, normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$. Norme sur un espace produit.
- Boules ouvertes, fermées. Parties bornées, parties convexes. Les boules sont convexes.
- Suites, suites convergentes dans un espace vectoriel normé. Suites extraites et valeurs d'adhérence.
- Normes équivalentes.

Espaces vectoriels normés : questions de cours seulement à ce stade.

À venir : Espaces vectoriels normés – Polynômes annulateurs et réduction.